Soluciones de exámenes de “Lógica informática”

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 10 de Junio del 2004 (Versión del 9 de marzo de 2007)

Índice general

Curso 2000–01

Examen de Junio de 2001

Ejercicio 1 *Este ejercicio tiene 3 apartados.*

1. *Decide, utilizando el método que se indica, si cada una de las fórmulas siguientes es insatisfactible o una tautología.*

$$\begin{aligned} &A : (p \land q \leftrightarrow p \lor q) \to (p \to q) \\ &B : (p \to \neg(q \to \neg r)) \land (r \to \neg q) \\ &C : (q \to p \land r) \land \neg(p \leftrightarrow p \lor q) \end{aligned}$$

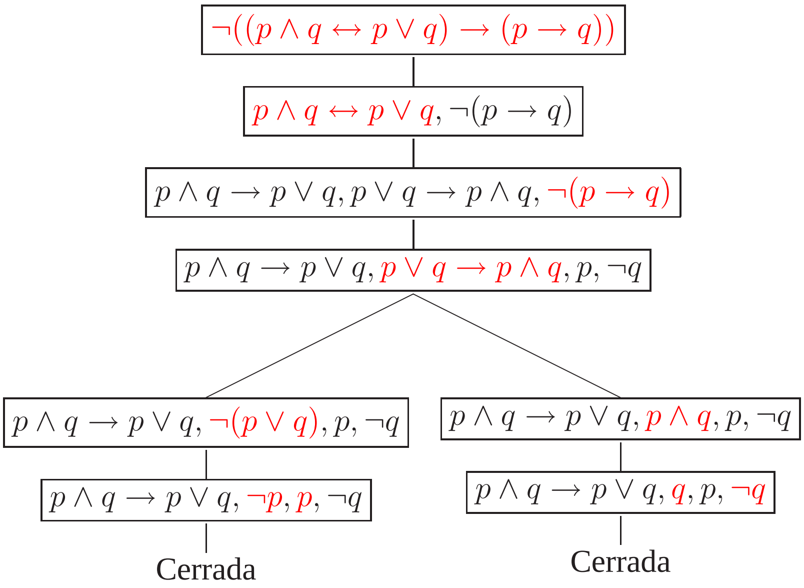
   Los métodos que deben usarse son: tableros semánticos para A, formas normales para B y resolución para C.

2. *Describe, razonadamente, todos los modelos de cada una de las fórmulas anteriores.*

3. *Consideremos el conjunto $U = \{p \lor q \to r \lor s, r \land t \to s, r \land \neg t \to \neg u\}$. Decide, mediante tableros semánticos, si $U \models p \to s \lor \neg u$.*

Solución:

Solución del apartado (1.a): La fórmula A es una tautología ya que el tablero semántico de $\{\neg A\}$



tiene todas las hojas cerradas.

Solución del apartado (1.b): Vamos a calcular una forma normal disyuntiva de B:

$$\begin{array}{lll}
 & (p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r)) \wedge (r \rightarrow \neg q) & \\
\equiv & (\neg p \vee \neg(\neg q \vee \neg r)) \wedge (\neg r \vee \neg q) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg\neg r)) \wedge (\neg r \vee \neg q) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg r \vee \neg q) & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (\neg p \wedge (\neg r \vee \neg q)) \vee ((q \wedge r) \wedge (\neg r \vee \neg q)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & ((\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee ((q \wedge r) \wedge (\neg r \vee \neg q)) & \text{[por (6)]} \\
\equiv & ((\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee ((q \wedge r \wedge \neg r) \vee (q \wedge r \wedge \neg q)) & \text{[por (6)]} \\
\equiv & ((\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\mathsf{F} \vee \mathsf{F}) & \\
\equiv & (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q) &
\end{array}$$

Por tanto, la fórmula B es satisfacible (por ejemplo, si $I(p) = I(r) = 0$, entonces $I(B) = 1$), pero no es una tautología (por ejemplo, si $I(p) = 1$, entonces $I(B) = 0$).

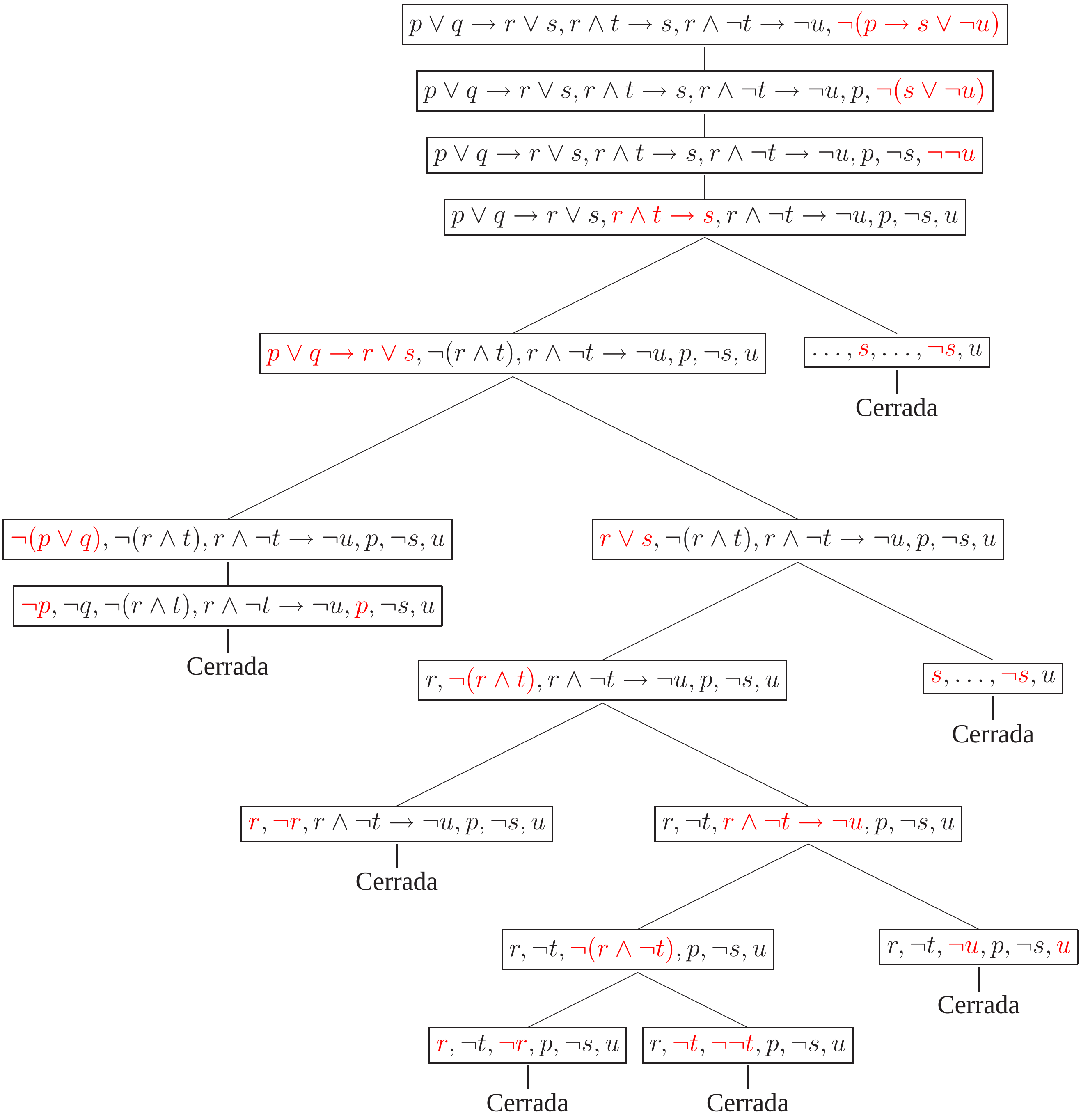
Solución del apartado (1.c): En primer lugar, se calcula una forma clausal de $\neg C$.

$$\begin{array}{lll}
 & \neg((q \rightarrow p \wedge r) \wedge \neg(p \leftrightarrow p \vee q)) & \\
\equiv & \neg((q \rightarrow p \wedge r) \wedge \neg((p \rightarrow p \vee q) \wedge (p \vee q \rightarrow p))) & \text{[por (1)]} \\
\equiv & \neg((\neg q \vee (p \wedge r)) \wedge \neg((\neg p \vee (p \vee q)) \wedge (\neg(p \vee q) \vee p))) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \neg(\neg q \vee (p \wedge r)) \vee \neg\neg((\neg p \vee (p \vee q)) \wedge (\neg(p \vee q) \vee p))) & \text{[por (3)]} \\
\equiv & (\neg\neg q \wedge \neg(p \wedge r)) \vee ((\neg p \vee (p \vee q)) \wedge (\neg(p \vee q) \vee p))) & \text{[por (4) y (5)]} \\
\equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee ((\neg p \vee (p \vee q)) \wedge (\neg(p \vee q) \vee p))) & \text{[por (3) y (5)]} \\
\equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (\mathsf{V} \wedge (\neg(p \vee q) \vee p))) & \\
\equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (\neg(p \vee q) \vee p) & \\
\equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \vee p) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (\mathsf{V} \wedge (\neg q \vee p)) & \\
\equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (\neg q \vee p) & \\
\equiv & (q \vee (\neg q \vee p)) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \vee (\neg q \vee p)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \mathsf{V} \wedge \mathsf{V} & \\
\equiv & \mathsf{V} &
\end{array}$$

Puesto que $\neg C$ es una tautología, C es insatisfacible.

Solución del apartado (2): Puesto que A es una tautología, todas las interpretaciones son modelo de A. Los modelos de B son las interpretaciones I tales que $I(p) = I(r) = 0$ o bien $I(p) = I(q) = 0$. Puesto que C es insatisfacible, no tiene modelos.

Solución del apartado (3): Un tablero semántico de $U \cup \{\neg(p \to s \vee \neg u)\}$ es



Como todas las hojas son cerradas, $U \models p \to s \vee \neg u$.

Ejercicio 2 *Las relaciones de parentesco verifican la siguientes propiedades generales:*

- *Si x es hermano de y, entonces y es hermano de x.*

- *Todo el mundo es hijo de alguien.*
- *Nadie es hijo del hermano de su padre.*
- *Cualquier padre de una persona es también padre de todos los hermanos de esa persona.*
- *Nadie es hijo ni hermano de sí mismo.*

Tenemos los siguientes miembros de la familia Peláez: Don Antonio, Don Luis, Antoñito y Manolito y sabemos que Don Antonio y Don Luis son hermanos, Antoñito y Manolito son hermanos, y Antoñito es hijo de Don Antonio. Se pide:

1. *Formalizar los conocimientos anteriores en un lenguaje de primer orden usando tan solo:*
   - A, L, a, m *como constantes para D. Antonio, D. Luis, Antoñito y Manolito, respectivamente.*
   - *Los predicados:* $\mathsf{Her}(x, y) =$ *"x es hermano de y"*, $\mathsf{Hijo}(x, y) =$ *"x es hijo de y".*
2. *Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas obtenido en el apartado 1.*
3. *Decidir mediante resolución si Don Luis es el padre de Manolito o no.*

Solución:

Solución del apartado (1): Formalización:

- Si x es hermano de y, entonces y es hermano de x.

  $(\forall x)(\forall y)[\mathsf{Her}(x, y) \rightarrow \mathsf{Her}(y, x)]$.

- Todo el mundo es hijo de alguien.

  $(\forall x)(\exists y)\mathsf{Hijo}(x, y)$.

- Nadie es hijo del hermano de su padre.

  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[\mathsf{Hijo}(x, y) \wedge \mathsf{Her}(z, y) \rightarrow \neg\mathsf{Hijo}(x, z)]$.

- Cualquier padre de una persona es también padre de todos los hermanos de esa persona.

  $(\forall x)(\forall y)[\mathsf{Hijo}(x, y) \rightarrow (\forall z)[\mathsf{Her}(z, x) \rightarrow \mathsf{Hijo}(z, y)]]$.

- Nadie es hijo ni hermano de sí mismo.

  $(\forall x)[\neg\mathsf{Hijo}(x, x) \wedge \neg\mathsf{Her}(x, x)]$.

- Don Antonio y Don Luis son hermanos.

  $\mathsf{Her}(A, L)$.

- Antoñito y Manolito son hermanos.

  $\mathsf{Her}(a, m)$.

- Antoñito es hijo de Don Antonio.

  $\mathsf{Hijo}(a, A)$.

Solución del apartado (2): Cálculo de formas clausales:

$$\begin{array}{ll}
 & (\forall x)(\forall y)[\mathsf{Her}(x,y) \to \mathsf{Her}(y,x)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg\mathsf{Her}(x,y) \lor \mathsf{Her}(y,x)] \quad \text{[por (4)]} \\
\equiv & \{\{\neg\mathsf{Her}(x,y), \mathsf{Her}(y,x)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)(\exists y)\mathsf{Hijo}(x,y) & \\
\equiv_{sat} & (\forall x)\mathsf{Hijo}(x, f(x)) & \text{[Skolem } f\text{]} \\
\equiv & \{\{\mathsf{Hijo}(x, f(x))\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\mathsf{Hijo}(x,y) \land \mathsf{Her}(z,y) \to \neg\mathsf{Hijo}(x,z)] & \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\neg(\mathsf{Hijo}(x,y) \land \mathsf{Her}(z,y)) \lor \neg\mathsf{Hijo}(x,z)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\neg\mathsf{Hijo}(x,y) \lor \neg\mathsf{Her}(z,y) \lor \neg\mathsf{Hijo}(x,z)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg\mathsf{Hijo}(x,y), \neg\mathsf{Her}(z,y), \neg\mathsf{Hijo}(x,z)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)(\forall y)[\mathsf{Hijo}(x,y) \to (\forall z)[\mathsf{Her}(z,x) \to \mathsf{Hijo}(z,y)]] & \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg\mathsf{Hijo}(x,y) \lor (\forall z)[\neg\mathsf{Her}(z,x) \lor \mathsf{Hijo}(z,y)]] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\neg\mathsf{Hijo}(x,y) \lor \neg\mathsf{Her}(z,x) \lor \mathsf{Hijo}(z,y)] & \text{[por (16)]} \\
\equiv & \{\{\neg\mathsf{Hijo}(x,y), \neg\mathsf{Her}(z,x), \mathsf{Hijo}(z,y)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & (\forall x)[\neg\mathsf{Hijo}(x,x) \land \neg\mathsf{Her}(x,x)] \\
\equiv & \{\{\neg\mathsf{Hijo}(x,x)\}, \{\neg\mathsf{Her}(x,x)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{Her}(A,L) \\
\equiv & \{\{\mathsf{Her}(A,L)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{Her}(a,m) \\
\equiv & \{\{\mathsf{Her}(a,m)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{Hijo}(a,A) \\
\equiv & \{\{\mathsf{Hijo}(a,A)\}\}
\end{array}$$

Solución del apartado (3): Vamos a demostrar que Don Luis no es el padre de Manolito. Para ello suponemos lo contrario lo que da lugar a la cláusula $\{\mathsf{Hijo}(m, L)\}$. Una demostración por resolución de las cláusulas obtennidas es

1	$\{\neg\mathsf{Her}(x,y), \mathsf{Her}(y,x)\}$	
2	$\{\mathsf{Hijo}(x,f(x))\}$	
3	$\{\neg\mathsf{Hijo}(x,y), \neg\mathsf{Her}(z,y), \neg\mathsf{Hijo}(x,z)\}$	
4	$\{\neg\mathsf{Hijo}(x,y), \neg\mathsf{Her}(z,x), \mathsf{Hijo}(z,y)\}$	
5	$\{\neg\mathsf{Hijo}(x,x)\}$	
6	$\{\neg\mathsf{Her}(x,x)\}$	
7	$\{\mathsf{Her}(A,L)\}$	
8	$\{\mathsf{Her}(a,m)\}$	
9	$\{\mathsf{Hijo}(a,A)\}$	
10	$\{\mathsf{Hijo}(m,L)\}$	
11	$\{\neg\mathsf{Hijo}(a,y), \neg\mathsf{Her}(A,y)\}$	Resolvente de 3 y 9 con $\sigma = [x/a, z/A]$
12	$\{\neg\mathsf{Her}(z,m), \mathsf{Hijo}(z,L)\}$	Resolvente de 4 y 10 con $\sigma = [x/m, y/L]$
13	$\{\mathsf{Hijo}(a,L)\}$	Resolvente de 12 y 8 con $\sigma = [z/a]$
14	$\{\neg\mathsf{Her}(A,L)\}$	Resolvente de 13 y 11 con $\sigma = [y/L]$
15	$\square$	Resolvente de 14 y 7 con $\sigma = \epsilon$

Ejercicio 3 *Este ejercicio tiene dos apartados.*

1. *Obténganse formas prenexa conjuntiva, de Skolem y clausal de la siguiente fórmula:*

$$(\exists x)(\forall u)[(\exists y)P(u,f(y),a) \to (Q(u,x) \to (\exists y)[Q(y,z) \land P(u,y,z)])]$$

siendo a un símbolo de constante y f un símbolo de función de aridad 1.

2. *Dada una fórmula proposicional F, sea $T(F) = \{G \in PROP : F \models G\}$. Pruébese que, para cada $A, B \in PROP$,*

   (a) $A \to B$ *es tautología* $\iff$ $T(B) \subseteq T(A)$.

   (b) $A \equiv B$ $\iff$ $T(B) = T(A)$.

Solución:

Solución del apartado (1):

1.– Forma normal prenexa conjuntiva:

$$\begin{array}{lll}
 & (\exists x)(\forall u)[(\exists y)P(u,f(y),a) \to (Q(u,x) \to (\exists y)[Q(y,z) \land P(u,y,z)])] & \\
\equiv & (\exists x)(\forall u)[(\exists y)P(u,f(y),a) \to (Q(u,x) \to (\exists v)[Q(v,z) \land P(u,v,z)])] & \text{[por rectificación]} \\
\equiv & (\exists x)(\forall u)[\neg(\exists y)P(u,f(y),a) \lor (\neg Q(u,x) \lor (\exists v)[Q(v,z) \land P(u,v,z)])] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\exists x)(\forall u)[(\forall y)\neg P(u,f(y),a) \lor (\neg Q(u,x) \lor (\exists v)[Q(v,z) \land P(u,v,z)])] & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\exists x)(\forall u)(\exists v)[(\forall y)\neg P(u,f(y),a) \lor (\neg Q(u,x) \lor (Q(v,z) \land P(u,v,z)))] & \text{[por (18)]} \\
\equiv & (\exists x)(\forall u)(\exists v)(\forall y)[\neg P(u,f(y),a) \lor (\neg Q(u,x) \lor (Q(v,z) \land P(u,v,z)))] & \text{[por (12)]} \\
\equiv & (\exists x)(\forall u)(\exists v)(\forall y)[(\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor Q(v,z)) \land & \\
 & \qquad\qquad (\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor P(u,v,z))] & \text{[por (19)]}
\end{array}$$

2.– Forma de Skolem:

$$
\begin{array}{lll}
 & (\exists x)(\forall u)[(\exists y)P(u,f(y),a) \rightarrow (Q(u,x) \rightarrow (\exists y)[Q(y,z) \land P(u,y,z)])] & \\
\equiv & (\exists x)(\forall u)(\exists v)(\forall y)[(\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor Q(v,z)) \land & \\
 & \qquad (\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor P(u,v,z))] & \\
\equiv_{sat} & (\exists z)(\exists x)(\forall u)(\exists v)(\forall y)[(\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor Q(v,z)) \land & \\
 & \qquad (\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor P(u,v,z))] & \text{[por cierre]} \\
\equiv_{sat} & (\exists x)(\forall u)(\exists v)(\forall y)[(\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor Q(v,b)) \land & \\
 & \qquad (\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor P(u,v,b))] & \text{[Skolem } b\text{]} \\
\equiv_{sat} & (\forall u)(\exists v)(\forall y)[(\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,c) \lor Q(v,b)) \land & \\
 & \qquad (\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,c) \lor P(u,v,b))] & \text{[Skolem } c\text{]} \\
\equiv_{sat} & (\forall u)(\forall y)[(\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,c) \lor Q(g(u),b)) \land & \\
 & \qquad (\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,c) \lor P(u,g(u),b))] & \text{[Skolem } g\text{]}
\end{array}
$$

3.– Forma clausal:

$$
\begin{array}{lll}
 & (\exists x)(\forall u)[(\exists y)P(u,f(y),a) \rightarrow (Q(u,x) \rightarrow (\exists y)[Q(y,z) \land P(u,y,z)])] & \\
\equiv_{sat} & (\forall u)(\forall y)[(\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,c) \lor Q(g(u),b)) \land & \\
 & \qquad (\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,c) \lor P(u,g(u),b))] & \text{[Skolem } g\text{]} \\
\equiv & \{\{\neg P(u,f(y),a), \neg Q(u,c), Q(g(u),b)\}, & \\
 & \ \{\neg P(u,f(y),a), \neg Q(u,c), P(u,g(u),b)\}\} &
\end{array}
$$

Solución del apartado (2a):

1.– Demostración de que si $\models A \rightarrow B$, entonces $T(B) \subseteq T(A)$: Supongamos que

$$\models A \rightarrow B \tag{1}$$

Sea $G \in T(P)$. Tenemos que demostrar que $G \in T(A)$. Por la elección de G y la definición de $T(P)$, se tiene que

$$G \in PROP \tag{2}$$

$$B \models G \tag{3}$$

Para probar que $A \models G$, consideremos una interpretación I tal que

$$I(A) = 1 \tag{4}$$

Entonces, por (4) y (1)

$$I(B) = 1 \tag{5}$$

Por (5) y (3)

$$I(G) = 1 \tag{6}$$

Luego,

$$A \models G \tag{7}$$

Por (2), (7) y la definición de $T(A)$, se tiene que $G \in T(A)$.

2.– Demostración de que si $T(B) \subseteq T(A)$, entonces $\models A \rightarrow B$: Supongamos que

$$T(B) \subseteq T(A) \tag{8}$$

Puesto que $B \models B$, se tiene que $B \in T(B)$ y, por (8), $B \in T(A)$. Luego, por la definición de $T(A)$, $A \models B$ y, por tanto, $\models A \rightarrow B$.

Solución del apartado (2b):

$$\begin{array}{rcl} A \equiv B & \Longleftrightarrow & A \models B \text{ y } B \models A \\ & \Longleftrightarrow & \models A \to B \text{ y } \models B \to A \\ & \Longleftrightarrow & T(B) \subseteq T(A) \text{ y } T(A) \subseteq T(B) \\ & \Longleftrightarrow & T(A) = T(B) \end{array}$$

Ejercicio 4 *Sea S el conjunto formado por las siguientes fórmulas*

(a) $(\forall x)P(x,x)$.

(b) $(\forall x)(\forall y)[P(x,y) \lor P(y,x)]$.

(c) $(\forall x)[P(x,f(x)) \land \neg P(f(x),x) \land P(a,x)]$.

(d) $(\forall x)\neg(\exists y)[P(x,y) \land P(y,f(x)) \land \neg P(y,x) \land \neg P(f(x),y)]$.

Probar mediante resolución básica o construyendo un modelo de Herbrand, que

1. $S \models (\forall x)(\exists y)[P(x,y) \land \neg P(y,x)]$.
2. $S \not\models (\forall x)[\neg P(x,a) \to (\exists y)P(y,x)]$.

Examen de Septiembre de 2001

Ejercicio 5 *Este ejercicio tiene dos apartados.*

(a) Pruébese que la siguiente fórmula es una tautología:

$$(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \lor q \rightarrow r))$$

Primero utilizando tableros semánticos y después mediante resolución proposicional.

(b) Pruébese que:

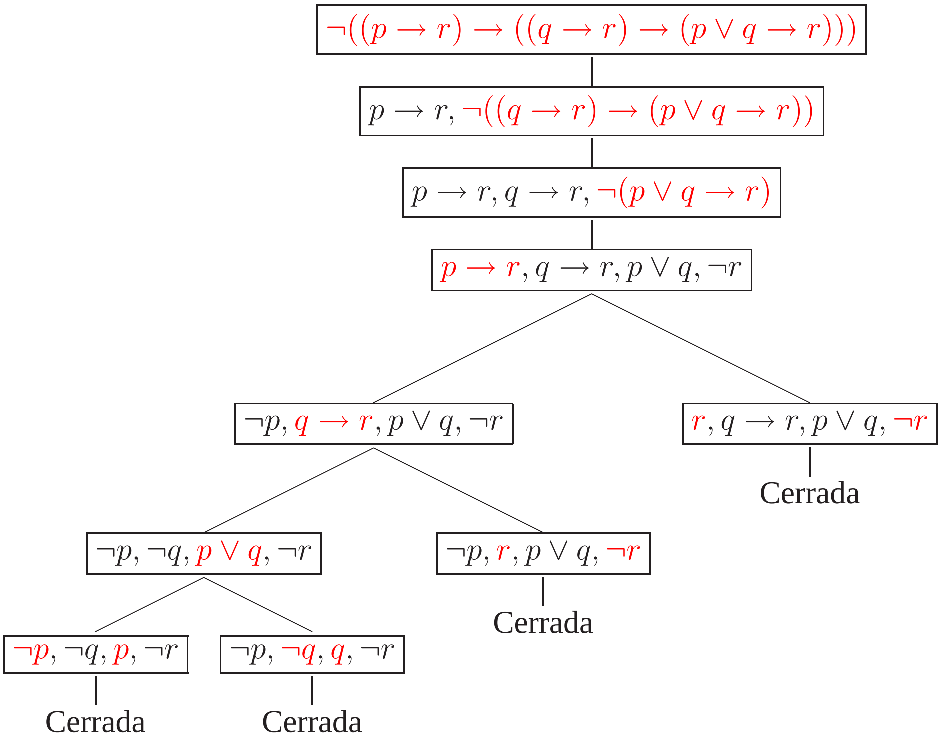
- *(b.1) Si U es un conjunto de tautologías y A es una fórmula proposicional tal que $U \models A$, entonces A es una tautología.*
- *(b.2) Si A y B son dos cláusulas proposicionales y F es la fórmula $\neg(A \land B)$, entonces F es insatisfactible syss A y B contienen ambas un par complementario.*

Solución:

Solución del apartado (a.1): Un tablero semántico de

$$\{\neg((p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \lor q \rightarrow r)))\}$$

es



Como todas sus hojas son cerradas, la fórmula es una tautología.

Solución del apartado (a.2): En primer lugar, se calcula una forma clausal de $\neg((p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q \to r)))$.

$$\begin{array}{lll}
 & \neg((p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q \to r))) & \\
\equiv & \neg(\neg(\neg p \vee r) \vee (\neg(\neg q \vee r) \vee (\neg(p \vee q) \vee r))) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \neg\neg(\neg p \vee r) \wedge \neg(\neg(\neg q \vee r) \vee (\neg(p \vee q) \vee r)) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\neg p \vee r) \wedge \neg\neg(\neg q \vee r) \wedge \neg(\neg(p \vee q) \vee r) & \text{[por (5) y (4)]} \\
\equiv & (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg\neg(p \vee q) \wedge \neg r) & \text{[por (5) y (4)]} \\
\equiv & (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg p, r\}, \{\neg q, r\}, \{p, q\}, \{\neg r\}\} &
\end{array}$$

Una demostración por resolución es

1	$\{\neg p, r\}$	
2	$\{\neg q, r\}$	
3	$\{p, q\}$	
4	$\{\neg r\}$	
5	$\{\neg p\}$	Resolvente de 1 y 4
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 2 y 4
7	$\{q\}$	Resolvente de 3 y 5
8	$\Box$	Resolvente de 7 y 6

Solución del apartado (b.1): Sea I una interpretación. Entonces, $I \models U$ (por ser los elementos de U tautologías), y $I \models A$ (porque $U \models A$). Por tanto, A es una tautología.

Solución del apartado (b.2):

$$\begin{array}{ll}
 & F \text{ es insatisfacible} \\
\iff & \neg(A \wedge B) \text{ es insatisfacible} \\
\iff & \text{para toda interpretación } I,\ I(\neg(A \wedge B)) = 0 \\
\iff & \text{para toda interpretación } I,\ I(A \wedge B) = 1 \\
\iff & \text{para toda interpretación } I,\ I(A) = I(B) = 1 \\
\iff & A \text{ y } B \text{ contienen ambas un par de literales complementarios} \quad \text{[por ser } A \text{ y } B \text{ cláusulas]}
\end{array}$$

Ejercicio 6 *Sea*

$$S = \{(\forall x)\neg P(x,x), (\forall x)(\forall y)[P(x,y) \vee P(y,x)], (\forall x)P(x, f(x))\}$$

y sea F la fórmula

$$(\forall x)(\forall y)[P(x,y) \to (\exists z)[P(x,z) \wedge P(z,y)]].$$

(a) Hállese una forma clausal de F y otra de $\neg F$.

(b) Pruébese, utilizando un modelo de Herbrand, que $S \not\models F$.

Solución:

Solución del apartado (a.1): Cálculo de una forma clausal de F:

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)(\forall y)[P(x,y) \to (\exists z)[P(x,z) \land P(z,y)]] & \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x,y) \lor (\exists z)[P(x,z) \land P(z,y)]] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\exists z)[\neg P(x,y) \lor (P(x,z) \land P(z,y))] & \text{[por (18)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\exists z)[(\neg P(x,y) \lor P(x,z)) \land (\neg P(x,y) \lor P(z,y))] & \text{[por (19)]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[(\neg P(x,y) \lor P(x,f(x,y))) \land (\neg P(x,y) \lor P(f(x,y),y))] & \text{[Skolem } f\text{]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x,y), P(x,f(x,y))\}, \{\neg P(x,y), P(f(x,y),y)\}\} &
\end{array}$$

Solución del apartado (a.2): Cálculo de una forma clausal de $\neg F$:

$$\begin{array}{lll}
 & \neg(\forall x)(\forall y)[P(x,y) \to (\exists z)[P(x,z) \land P(z,y)]] & \\
\equiv & \neg(\forall x)(\forall y)(\exists z)[\neg P(x,y) \lor (P(x,z) \land P(z,y))] & \text{[por (a.1)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)\neg(\neg P(x,y) \lor (P(x,z) \land P(z,y))) & \text{[por (8) y (9)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[\neg\neg P(x,y) \land \neg(P(x,z) \land P(z,y))] & \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[P(x,y) \land (\neg P(x,z) \lor \neg P(z,y))] & \text{[por (7) y (5)]} \\
\equiv_{sat} & (\forall z)[P(a,b) \land (\neg P(a,z) \lor \neg P(z,b))] & \text{[Skolem } a \text{ y } b\text{]} \\
\equiv & \{\{P(a,b)\}, \{\neg P(a,z), \neg P(z,b)\}\} &
\end{array}$$

Ejercicio 7 *Se conocen los siguientes hechos:*

1. *Todos los ordenadores son máquinas.*
2. *El TX–150 es un ordenador.*
3. *Félix puede arreglar, o bien estropear, cualquier máquina.*
4. *Cada cosa puede ser arreglada por alguien.*
5. *Las cosas solamente desesperan a quienes no son capaces de arreglarlas.*
6. *El TX–150 desespera a Félix.*
7. *Ninguna máquina puede ser arreglada por sí misma.*

Se pide:

(a) *Formalizar los hechos anteriores utilizando los siguientes símbolos de predicado:* $O(x)$*: "*x *es un ordenador",* $M(x)$*: "*x *es una máquina",* $A(x,y)$*: "*x *puede arreglar* y*",* $E(x,y)$*: "*x *estropea* y*" y* $D(x,y)$*: "*x *desespera a* y*" . Y* a*,* b *como constantes para TX–150 y Félix, respectivamente.*

(b) *Utilizando resolución responder a las siguientes preguntas: ¿Puede arreglar Félix el TX–150? ¿Estropea Félix el TX–150?*

Solución:

Solución del apartado (a): Formalización:

1. Todos los ordenadores son máquinas.

   $(\forall x)[O(x) \rightarrow M(x)]$.

2. El TX–150 es un ordenador.

   $O(a)$.

3. Félix puede arreglar, o bien estropear, cualquier máquina.

   $(\forall x)[M(x) \rightarrow A(b,x) \vee E(b,x)]$.

4. Cada cosa puede ser arreglada por alguien.

   $(\forall x)(\exists y)A(y,x)$.

5. Las cosas solamente desesperan a quienes no son capaces de arreglarlas.

   $(\forall x)(\forall y)[D(x,y) \rightarrow \neg A(y,x)]$.

6. El TX–150 desespera a Félix.

   $D(a,b)$.

7. Ninguna máquina puede ser arreglada por sí misma.

   $\neg(\exists x)[M(x) \wedge A(x,x)]$.

Solución del apartado (b): En primer lugar, se calculan formas clausales de las fórmulas anteriores.

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)[O(x) \rightarrow M(x)] \\ \equiv & (\forall x)[\neg O(x) \vee M(x)] \quad \text{[por (4)]} \\ \equiv & \{\{\neg O(x), M(x)\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & O(a) \\ \equiv & \{\{O(a)\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)[M(x) \rightarrow A(b,x) \vee E(b,x)] \\ \equiv & (\forall x)[\neg M(x) \vee A(b,x) \vee E(b,x)] \quad \text{[por (4)]} \\ \equiv & \{\{\neg M(x), A(b,x), E(b,x)\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)(\exists y)A(y,x) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)A(f(x),x) \quad \text{[Skolem } f\text{]} \\ \equiv & \{\{A(f(x),x)\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)(\forall y)[D(x,y) \rightarrow \neg A(y,x)] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg D(x,y) \vee \neg A(y,x)] \quad \text{[por (4)]} \\ \equiv & \{\{\neg D(x,y), \neg A(y,x)\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & D(a,b) \\ \equiv & \{\{D(a,b)\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & \neg(\exists x)[M(x) \land A(x,x)] & \\ \equiv & (\forall x)\neg(M(x) \land A(x,x)) & \text{[por (8)]} \\ \equiv & (\forall x)[\neg M(x) \lor \neg A(x,x)] & \text{[por (5)]} \\ \equiv & \{\{\neg M(x), \neg A(x,x)\}\} & \end{array}$$

Las cláusulas obtenidas son

$$\begin{array}{ll} 1 & \{\neg O(x), M(x)\} \\ 2 & \{O(a)\} \\ 3 & \{\neg M(x), A(b,x), E(b,x)\} \\ 4 & \{A(f(x),x)\} \\ 5 & \{\neg D(x,y), \neg A(y,x)\} \\ 6 & \{D(a,b)\} \\ 7 & \{\neg M(x), \neg A(x,x)\} \end{array}$$

Vamos a demostrar que Félix no puede arreglar el TX-150. Para ello, suponemos lo contrario, lo que da lugar a la cláusula

$$8 \quad A(b,a)$$

Una refutación por resolución de las cláusulas anteriores es

$$\begin{array}{lll} 5 & \{\neg D(x,y), \neg A(y,x)\} & \\ 6 & \{D(a,b)\} & \\ 8 & \{A(b,a)\} & \\ 9 & \{\neg A(b,a)\} & \text{Resolvente de } 5 \text{ y } 5 \\ 10 & \Box & \text{Resolvente de } 9 \text{ y } 8 \end{array}$$

Vamos a demostrar que Félix estropea el TX-150. Para ello, suponemos lo contrario, lo que da lugar a la cláusula

$$11 \quad \neg E(b,a)$$

Una refutación por resolución de la cláusula 11 junto con 1–7 es

$$\begin{array}{lll} 1 & \{\neg O(x), M(x)\} & \\ 2 & \{O(a)\} & \\ 3 & \{\neg M(x), A(b,x), E(b,x)\} & \\ 5 & \{\neg D(x,y), \neg A(y,x)\} & \\ 6 & \{D(a,b)\} & \\ 10 & \{\neg E(b,a)\} & \\ 11 & \{M(a)\} & \text{Resolvente de } 1 \text{ y } 2 \\ 12 & \{\neg A(b,a)\} & \text{Resolvente de } 5 \text{ y } 6 \\ 13 & \{A(b,a), E(b,a)\} & \text{Resolvente de } 3 \text{ y } 11 \\ 14 & \{E(b,a)\} & \text{Resolvente de } 13 \text{ y } 12 \\ 15 & \Box & \text{Resolvente de } 14 \text{ y } 10 \end{array}$$

Examen de Diciembre de 2001

Ejercicio 8 *Sea A la fórmula proposicional*

$$(p \lor q \leftrightarrow \neg r) \land (\neg p \to s) \land (\neg t \to q) \land (s \land t \to u).$$

(a) Pruébese que A es satisfactible.

(b) Demuéstrese por el método de tableros semánticos que $A \models r \to u$.

(c) Pruébese por resolución proposicional que

$$\{p \lor q \leftrightarrow \neg r, \neg p \to s, \neg t \to q, s \land t \to u\} \models r \to u.$$

Solución:

Solución del apartado (a): Vamos a demostrar la satisfacibildad de A mostrando un modelo de A. Sea I una interpretación. Para que I verifique las implicaciones de A basta que no verifique sus consecuentes; es decir, $I(s) = 0$, $I(q) = 0$ y $I(u) = 0$. Si $I(q) = 0$, para que v verifique $(p \lor q \leftrightarrow \neg r)$, basta que $I(p) \neq I(r)$ (por ejemplo, $I(p) = 1$ y $I(r) = 0$). Por tanto, la interpretación I tal que

$$I(p) = 1, I(q) = 0, I(r) = 0, I(s) = 0 \text{ y } I(u) = 0.$$

es un modelo de A.

Solución del apartado (b): Un tablero semántico de $\{A, \neg(r \to u\}$ se muestra en la Figura 1 (página 20). Puesto que todas sus hojas son cerradas, se tiene que $A \models r \to u$.

Solución del apartado (c): En primer lugar, se calcula formas clausales de las fórmulas de las hipótesis y de la negación de la conclusión:

$$\begin{array}{lll}
 & p \lor q \leftrightarrow \neg r & \\
\equiv & (p \lor q \to \neg r) \land (\neg r \to p \lor q) & \text{[por (1)]} \\
\equiv & (\neg(p \lor q) \lor \neg r) \land (\neg\neg r \lor p \lor q) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & ((\neg p \land \neg q) \lor \neg r) \land (r \lor p \lor q) & \text{[por (3) y (5)]} \\
\equiv & ((\neg p \lor \neg r) \land (\neg q \lor \neg r)) \land (r \lor p \lor q) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \{\{\neg p, \neg r\}, \{\neg q, \neg r\}, \{r, p, q\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & \neg p \to s & \\
\equiv & \neg\neg p \lor s & \text{[por (2)]} \\
\equiv & p \lor s & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{p, s\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & \neg t \to q & \\
\equiv & \neg\neg t \lor q & \text{[por (2)]} \\
\equiv & t \lor q & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{t, q\}\} &
\end{array}$$

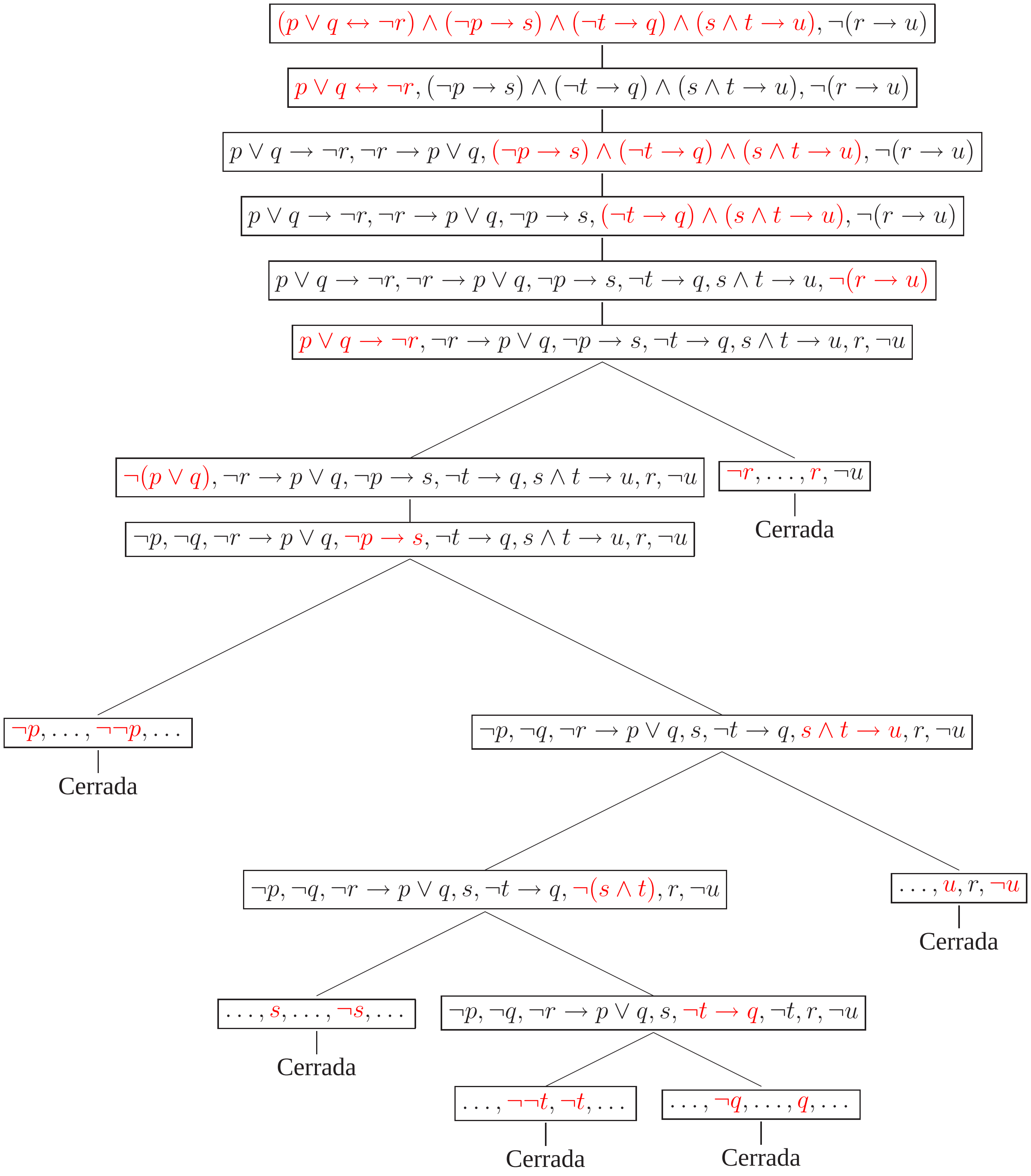


Figura 1: Árbol semántico

$$\begin{array}{lll}
 & s \wedge t \rightarrow u & \\
\equiv & \neg(s \wedge t) \vee u & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg s \vee \neg t) \vee u & \text{[por (3)]} \\
\equiv & \{\{\neg s, \neg t, u\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & \neg(r \rightarrow u) & \\
\equiv & \neg(\neg r \vee u) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \neg\neg r \wedge \neg u & \text{[por (4)]} \\
\equiv & r \wedge \neg u & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{r\}\}, \{\neg u\}\} &
\end{array}$$

Una resolución de las cláusulas obtenidas es

1	$\{\neg p, \neg r\}$	
2	$\{\neg q, \neg r\}$	
3	$\{r, p, q\}$	
4	$\{p, s\}$	
5	$\{t, q\}$	
6	$\{\neg s, \neg t, u\}$	
7	$\{r\}$	
8	$\{\neg u\}$	
9	$\{\neg q\}$	Resolvente de 7 y 2
10	$\{\neg p\}$	Resolvente de 7 y 1
11	$\{\neg s, \neg t\}$	Resolvente de 8 y 6
12	$\{t\}$	Resolvente de 9 y 5
13	$\{s\}$	Resolvente de 10 y 4
14	$\{\neg t\}$	Resolvente de 11 y 13
15	$\square$	Resolvente de 14 y 12

Ejercicio 9 *Sea S el conjunto formado por las siguientes fórmulas:*

$F_1 : P(a) \wedge (\forall x)[P(x) \rightarrow Q(f(x), x)]$
$F_2 : (\forall x)(\forall y)[Q(x, y) \rightarrow (R(f(x)) \wedge \neg R(f(f(x))))]$
$F_3 : (\forall x)[P(x) \vee R(x)]$
$F_4 : (\forall x)\neg(P(x) \wedge R(x))$

Se pide:

(a) Probar mediante resolución que $S \models P(f(f(f(a))))$.

(b) Probar, utilizando un modelo de Herbrand, que $S \not\models (\forall x)[Q(f(x), x) \rightarrow P(x)]$.

Solución:

Solución del apartado (a): En primer lugar, se calculan formas clausales de las hipótesis y de la negación de la conclusión:

$$\begin{array}{lll}
F_1: & P(a) \land (\forall x)[P(x) \to Q(f(x),x)] & \\
\equiv & P(a) \land (\forall x)[\neg P(x) \lor Q(f(x),x)] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\forall x)[P(a) \land (\neg P(x) \lor Q(f(x),x))] & \text{[por (15)]} \\
\equiv & \{\{P(a)\}, \{\neg P(x), Q(f(x),x)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
F_2: & (\forall x)(\forall y)[Q(x,y) \to (R(f(x)) \land \neg R(f(f(x))))] & \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg Q(x,y) \lor (R(f(x)) \land \neg R(f(f(x))))] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[(\neg Q(x,y) \lor R(f(x))) \land (\neg Q(x,y) \lor \neg R(f(f(x))))] & \text{[por (19)]} \\
\equiv & \{\{\neg Q(x,y), R(f(x))\}, \{\neg Q(x,y), \neg R(f(f(x)))\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
F_3: & (\forall x)[P(x) \lor R(x)] \\
\equiv & \{\{P(x), R(x)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
F_4: & (\forall x)\neg(P(x) \land R(x)) & \\
\equiv & (\forall x)[\neg P(x) \lor \neg R(x)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg R(x)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \neg P(f(f(f(a)))) \\
\equiv & \{\{\neg P(f(f(f(a))))\}\}
\end{array}$$

Una resolución de las cláusulas obtenidas es

1	$\{P(a)\}$	
2	$\{\neg P(x), Q(f(x),x)\}$	
3	$\{\neg Q(x,y), R(f(x))\}$	
4	$\{\neg Q(x,y), \neg R(f(f(x)))\}$	
5	$\{P(x), R(x)\}$	
6	$\{\neg P(x), \neg R(x)\}$	
7	$\{\neg P(f(f(f(a))))\}$	
8	$\{R(f(f(f(a))))\}$	Resolvente de 7 y 5
9	$\{\neg Q(f(a),y)\}$	Resolvente de 8 y 4
10	$\{\neg P(a)\}$	Resolvente de 9 y 2
11	$\square$	Resolvente de 10 y 1

Solución del apartado (b): Vamos a obtener consecuencias que nos permitan contruir el modelo de Herbrand.

1	$(\forall x)[P(x) \rightarrow R(f(f(x)))]$	[por F_1 y F_2]
2	$(\forall x)(\forall y)[Q(x,y) \rightarrow P(f(f(x)))]$	[por F_2 y F_3]
3	$(\forall x)[R(x) \vee R(f(f(x)))]$	[por 1 y F_3]
4	$P(a)$	[por F_1]
5	$Q(f(a), a)$	[por 4 y F_1]
6	$\neg R(f(f(f(a))))$	[por 5 y F_2]
7	$R(f(a))$	[por 6 y 3]
8	$R(f(f(a)))$	[por 1 y 4]
9	$P(f(f(f(a))))$	[por 2 y 5]
10	$Q(f(f(f(f(a)))), f(f(f(a))))$	[por 9 y F_1]
11	$\neg R(f(f(f(f(f(f(a)))))))$	[por 10 y F_2]
12	$R(f(f(f(f(a)))))$	[por 11 y 3]
13	$R(f(f(f(f(f(a))))))$	[por 1 y 9]

Se observa que la ley de formación es

$$P(a), Q(f(a), a), R(f(a)), R(f(f(a))),$$
$$P(f(f(f(a)))), Q(f(f(f(f(a)))), f(f(f(a)))), R(f(f(f(f(a))))), R(f(f(f(f(f(a)))))), \dots$$

Sea

$$I_1 = \{P(f^{3n}(a)), Q(f^{3n+1}(a), f^{3n}(a)), R(f^{3n+1}(a)), R(f^{3n+2}(a)) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Se comprueba fácilmente que $I_1 \models S$ e $I_1 \models (\forall x)[Q(f(x), x) \rightarrow P(x)]$. Para extender I_1 a un modelo de S en el que no se verifique $(\forall x)[Q(f(x), x) \rightarrow P(x)]$, introducimos una nueva variable b y suponemos que $Q(f(b), b)$. De manera análoga a la anterior, se obtiene

$Q(f(b), b)$
$R(f(f(b)))$
$P(f(f(f(b))))$
$Q(f(f(f(f(b)))), f(f(f(b))))$
$R(f(f(f(f(f(b))))))$
$R(f(b))$
$P(f(f(f(f(f(f(b)))))))$
$Q(f(f(f(f(f(f(f(b))))))), f(f(f(f(f(f(b)))))))$
$P(f(f(f(f(f(f(f(f(f(b))))))))))$
$R(f(f(f(f(b)))))$
$R(f(f(f(f(f(f(f(f(b)))))))))$

Sea

$$I_2 = I_1 \cup \{P(f^{3(n+1)}(b)), Q(f^{3n+1}(b), f^{3n}(b)), R(f^{3n+1}(b)), R(f^{3n+2}(b)) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Se comprueba fácilmente que $I_2 \models S$ e $I_2 \not\models (\forall x)[Q(f(x), x) \rightarrow P(x)]$.

Ejercicio 10 *Este ejercicio tiene dos apartados.*

(a) Hállense las formas prenexa conjuntiva, de Skolem y clausal de la fórmula:

$$(\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\forall v)[Q(x,v) \lor R(x,y)] \to \neg(\exists v)\neg(\exists u)[Q(x,v) \land \neg R(x,u)]].$$

(b) Sean A y B fórmulas proposicionales y C una tautología. Pruébese que son equivalentes:

(1) $\models A \to (B \land C)$.

(2) Para cada interpretación I, si $I \models A \land C$ entonces $I \models B$.

Solución del apartado (a):

1.– Forma prenexa conjuntiva:

$$\begin{array}{ll}
 & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\forall v)[Q(x,v) \lor R(x,y)] \to \neg(\exists v)\neg(\exists u)[Q(x,v) \land \neg R(x,u)]] \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\forall v)[Q(x,v) \lor R(x,y)] \to \neg(\exists w)\neg(\exists u)[Q(x,w) \land \neg R(x,u)]] \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[\neg(\forall v)[Q(x,v) \lor R(x,y)] \lor \neg(\exists w)\neg(\exists u)[Q(x,w) \land \neg R(x,u)]] \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\exists v)\neg(Q(x,v) \lor R(x,y)) \lor (\forall w)\neg\neg(\exists u)[Q(x,w) \land \neg R(x,u)]] \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\exists v)(\neg Q(x,v) \land \neg R(x,y)) \lor (\forall w)(\exists u)[Q(x,w) \land \neg R(x,u)]] \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists v)(\forall w)[(\neg Q(x,v) \land \neg R(x,y)) \lor (\exists u)[Q(x,w) \land \neg R(x,u)]] \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists v)(\forall w)(\exists u)[(\neg Q(x,v) \land \neg R(x,y)) \lor (Q(x,w) \land \neg R(x,u))] \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists v)(\forall w)(\exists u)[\ (\neg Q(x,v) \lor Q(x,w)) \land (\neg Q(x,v) \lor \neg R(x,u)) \land \\
 & \qquad (\neg R(x,y) \lor Q(x,w)) \land (\neg R(x,y) \lor \neg R(x,u))]
\end{array}$$

2.– Forma de Skolem:

$$\begin{array}{ll}
 & (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists v)(\forall w)(\exists u)[\ (\neg Q(x,v) \lor Q(x,w)) \land (\neg Q(x,v) \lor \neg R(x,u)) \land \\
 & \qquad (\neg R(x,y) \lor Q(x,w)) \land (\neg R(x,y) \lor \neg R(x,u))] \\
\equiv_{sat} & (\exists y)(\forall z)(\exists v)(\forall w)(\exists u)[\ (\neg Q(a,v) \lor Q(a,w)) \land (\neg Q(a,v) \lor \neg R(a,u)) \land \\
 & \qquad (\neg R(a,y) \lor Q(a,w)) \land (\neg R(a,y) \lor \neg R(a,u))] \\
\equiv_{sat} & (\forall z)(\exists v)(\forall w)(\exists u)[\ (\neg Q(a,v) \lor Q(a,w)) \land (\neg Q(a,v) \lor \neg R(a,u)) \land \\
 & \qquad (\neg R(a,b) \lor Q(a,w)) \land (\neg R(a,b) \lor \neg R(a,u))] \\
\equiv_{sat} & (\forall z)(\forall w)(\exists u)[\ (\neg Q(a,f(z)) \lor Q(a,w)) \land (\neg Q(a,f(z)) \lor \neg R(a,u)) \land \\
 & \qquad (\neg R(a,b) \lor Q(a,w)) \land (\neg R(a,b) \lor \neg R(a,u))] \\
\equiv_{sat} & (\forall z)(\forall w)[\ (\neg Q(a,f(z)) \lor Q(a,w)) \land (\neg Q(a,f(z)) \lor \neg R(a,g(z,w))) \land \\
 & \qquad (\neg R(a,b) \lor Q(a,w)) \land (\neg R(a,b) \lor \neg R(a,g(z,w)))]
\end{array}$$

3.– Forma clausal:

$$\begin{array}{ll}
 & (\forall z)(\forall w)[\ (\neg Q(a,f(z)) \lor Q(a,w)) \land (\neg Q(a,f(z)) \lor \neg R(a,g(z,w))) \land \\
 & \qquad (\neg R(a,b) \lor Q(a,w)) \land (\neg R(a,b) \lor \neg R(a,g(z,w)))] \\
\equiv & \{\ \{\neg Q(a,f(z)), Q(a,w)\}, \\
 & \quad \{\neg Q(a,f(z)), \neg R(a,g(z,w))\}, \\
 & \quad \{\neg R(a,b), Q(a,w)\}, \\
 & \quad \{\neg R(a,b), \neg R(a,g(z,w))\}\ \}
\end{array}$$

Solución del apartado (b): [(1) $\Longrightarrow$ (2)] Sea I una interpretación. Entonces,

$$\begin{array}{ll}
 & I \models A \land C \\
\Longrightarrow & I \models A \\
\Longrightarrow & I \models B \land C \quad \text{[por (1)]} \\
\Longrightarrow & I \models B
\end{array}$$

[(2) $\Longrightarrow$ (1)] Sea I una interpretación. Entonces,

$$\begin{array}{lll} & I \models A & \\ \Longrightarrow & I \models A \wedge C & \text{[por ser } C \text{ tautología]} \\ \Longrightarrow & I \models B & \text{[por (2)]} \\ \Longrightarrow & I \models B \wedge C & \text{[por ser } C \text{ tautología]} \end{array}$$

Luego, $I \models A \to B \wedge C$ y, por tanto, $\models A \to B \wedge C$.

Curso 2001–02

Examen de Junio de 2002

Ejercicio 11 *Consideremos la fórmula proposicional*

$$A : (r \to p) \land (\neg r \to q \lor s) \to p \lor q \lor s$$

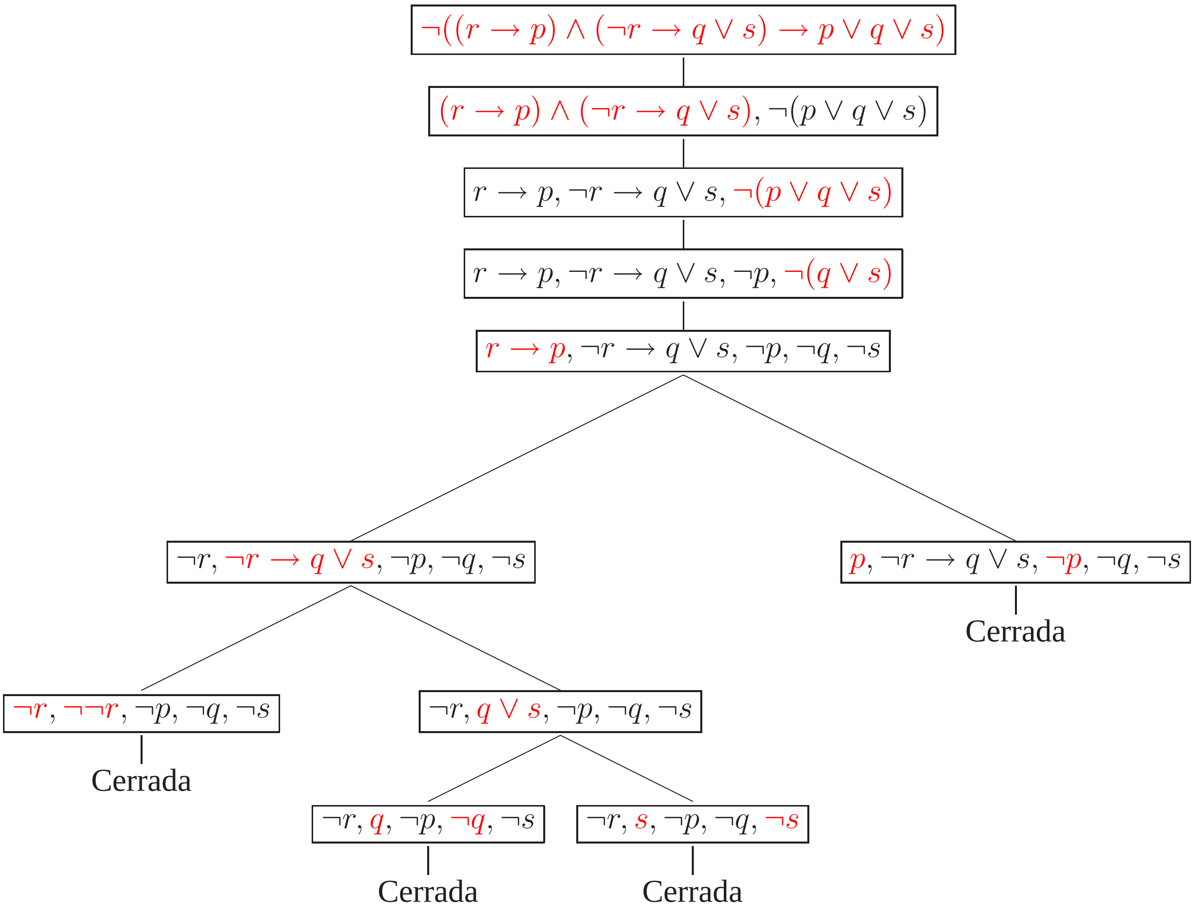
y el conjunto de fórmulas

$$U = \{r \leftrightarrow p \lor q, s \to p, \neg s \land \neg r \to s \lor t\}.$$

1. *Pruébese, mediante tableros semánticos, que A es una tautología.*
2. *Pruébese, razonadamente, que U es consistente, mostrando para ello un modelo de U.*
3. *Pruébese, mediante resolución lineal, que $U \models \neg p \to (q \lor t)$.*
4. *Sea B la fórmula anterior $\neg p \to (q \lor t)$. ¿Podemos eliminar alguna fórmula de U de manera que la fórmula B sea consecuencia lógica del conjunto de fórmulas restante?*

Solución:

Solución del apartado 1: El tablero semántico de $\neg A$ es



Como todas las hojas son cerradas, A es una tautología.

Solución del apartado 2: Sea I una interpretación. Para que I sea modelo de las dos implicaciones de U basta que sus consecuentes sean falsos en I; es decir, $I(p) = 0$ y $I(s) = I(t) = 0$. Sean I tal que $I(p) = 0$, para que I sea modelo de la equivalencia, basta que $I(r) = I(q)$. Por tanto, una interpretación I tal que $I(p) = 0$, $I(q) = 0$, $I(r) = 0$, $I(s) = 0$ y $I(t) = 0$ es un modelo de U.

Solución del apartado 3: En primer lugar, calculamos formas clausales de las fórmulas de U y de la negación de la conclusión:

$$\begin{array}{lll}
 & r \leftrightarrow p \lor q & \\
\equiv & (r \rightarrow p \lor q) \land (p \lor q \rightarrow r) & \text{[por (1)]} \\
\equiv & (\neg r \lor (p \lor q)) \land (\neg(p \lor q) \lor r) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg r \lor (p \lor q)) \land ((\neg p \land \neg q) \lor r) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\neg r \lor p \lor q) \land ((\neg p \lor r) \land (\neg q \lor r)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \{\{\neg r, p, q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, r\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & s \rightarrow p & \\
\equiv & \neg s \lor p & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \{\{\neg s, p\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & \neg s \land \neg r \rightarrow s \lor t & \\
\equiv & \neg(\neg s \land \neg r) \lor (s \lor t) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg\neg s \lor \neg\neg r) \lor (s \lor t) & \text{[por (3)]} \\
\equiv & (s \lor r) \lor (s \lor t) & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{s, r, t\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & \neg(\neg p \rightarrow (q \lor t)) & \\
\equiv & \neg(\neg\neg p \lor (q \lor t)) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \neg(p \lor (q \lor t)) & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \neg p \land \neg(q \lor t) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & \neg p \land (\neg q \land \neg t) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & \{\{\neg p\}, \{\neg q\}, \{\neg t\}\} &
\end{array}$$

Una resolución lineal con las cláusulas obtenidas es

1	$\{\neg r, p, q\}$	
2	$\{\neg p, r\}$	
3	$\{\neg q, r\}$	
4	$\{\neg s, p\}$	
5	$\{s, r, t\}$	
6	$\{\neg p\}$	
7	$\{\neg q\}$	
8	$\{\neg t\}$	
9	$\{s, r\}$	Resolvente de 5 y 8
10	$\{r, p\}$	Resolvente de 9 y 4
11	$\{p, q\}$	Resolvente de 10 y 1
12	$\{p\}$	Resolvente de 11 y 7
13	$\square$	Resolvente de 12 y 6

Solución del apartado 4: Sean

$$F_1 : r \leftrightarrow p \vee q$$
$$F_2 : s \rightarrow p$$
$$F_3 : \neg s \wedge \neg r \rightarrow s \vee t$$

las fórmulas de U. Veamos que no puede eliminarse ninguna sin perder la consecuencia:

- $\{F_2, F_3\} \not\models B$: Sea I_1 tal que

  $I_1(p)0 =$, $I_1(q) = 0$, $I_1(r) = 1$, $I_1(s) = 0$ y $I_1(t) = 0$.

  Entonces, $I_1(F_2) = I_1(F_3) = 1$ y $I_1(B) = 0$.

- $\{F_1, F_3\} \not\models B$: Sea I_2 tal que

  $I_2(p)0 =$, $I_2(q) = 0$, $I_2(r) = 0$, $I_2(s) = 1$ y $I_2(t) = 0$.

  Entonces, $I_2(F_1) = I_2(F_3) = 1$ y $I_2(B) = 0$.

- $\{F_1, F_2\} \not\models B$: Sea I_3 tal que

  $I_3(p)0 =$, $I_3(q) = 0$, $I_3(r) = 0$, $I_3(s) = 0$ y $I_3(t) = 0$.

  Entonces, $I_3(F_1) = I_3(F_2) = 1$ y $I_3(B) = 0$.

Ejercicio 12 *En cierto país oriental se ha celebrado la fase final del campeonato mundial de fútbol. Cierto diario deportivo ha publicado las siguientes estadísticas de tan magno acontecimiento:*

- *A todos los porteros que no vistieron camiseta negra les marcó un gol algún delantero europeo.*

- *Algún portero jugó con botas blancas y sólo le marcaron goles jugadores con botas blancas.*

- *Ningún portero se marcó un gol a sí mismo.*
- *Ningún jugador con botas blancas vistió camiseta negra.*

Se pide:

1. *Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los siguientes símbolos de predicado: $P(x)$: “x es portero”, $D(x)$: “x es delantero europeo”, $N(x)$: “x viste camiseta negra”, $B(x)$: “x juega con botas blancas”, $M(x,y)$: “x marcó un gol a y”.*
2. *Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas del apartado anterior.*
3. *Probar, mediante resolución, que algún delantero europeo jugó con botas blancas.*

Solución:

Solución del apartado 1:

- A todos los porteros que no vistieron camiseta negra les marcó un gol algún delantero europeo.

  $$(\forall x)[P(x) \wedge \neg N(x) \rightarrow (\exists y)[D(y) \wedge M(y,x)]].$$

- Algún portero jugó con botas blancas y sólo le marcaron goles jugadores con botas blancas.

  $$(\exists x)[P(x) \wedge B(x) \wedge (\forall y)[M(y,x) \rightarrow B(y)]].$$

- Ningún portero se marcó un gol a sí mismo.

  $$\neg(\exists x)[P(x) \wedge M(x,x)].$$

- Ningún jugador con botas blancas vistió camiseta negra.

  $$\neg(\exists x)[B(x) \wedge N(x)]$$

Solución del apartado 2: Cálculo de formas clausales:

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)[P(x) \wedge \neg N(x) \rightarrow (\exists y)[D(y) \wedge M(y,x)]] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg(P(x) \wedge \neg N(x)) \vee (\exists y)[D(y) \wedge M(y,x)]] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\forall x)[(\neg P(x) \vee \neg\neg N(x)) \vee (\exists y)[D(y) \wedge M(y,x)]] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (\forall x)[(\neg P(x) \vee N(x)) \vee (\exists y)[D(y) \wedge M(y,x)]] & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[(\neg P(x) \vee N(x)) \vee (D(y) \wedge M(y,x))] & \text{[por (18)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[((\neg P(x) \vee N(x)) \vee D(y)) \wedge ((\neg P(x) \vee N(x)) \vee M(y,x))] & \text{[por (19)]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[((\neg P(x) \vee N(x)) \vee D(f(x))) \wedge ((\neg P(x) \vee N(x)) \vee M(f(x),x))] & \text{[por Skolem]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x), N(x), D(f(x))\}, \{\neg P(x), N(x), M(f(x),x)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & (\exists x)[P(x) \wedge B(x) \wedge (\forall y)[M(y,x) \rightarrow B(y)]] & \\
\equiv & (\exists x)[P(x) \wedge B(x) \wedge (\forall y)[\neg M(y,x) \vee B(y)]] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)[P(x) \wedge B(x) \wedge (\neg M(y,x) \vee B(y))] & \text{[por (15)]} \\
\equiv_{sat} & (\forall y)[P(a) \wedge B(a) \wedge (\neg M(y,a) \vee B(y))] & \text{[por Skolem]} \\
\equiv & \{\{P(a)\}, \{B(a)\}, \{\neg M(y,a), B(y)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & \neg(\exists x)[P(x) \wedge M(x,x)] & \\
\equiv & (\forall x)\neg(P(x) \wedge M(x,x)) & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg P(x) \vee \neg M(x,x)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg M(x,x)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & \neg(\exists x)[B(x) \wedge N(x)] & \\
\equiv & (\forall x)\neg(B(x) \wedge N(x)) & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg B(x) \vee \neg N(x)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg B(x), \neg N(x)\}\} &
\end{array}$$

Solución del apartado 3: Para demostrar que "algún delantero europeo jugó con botas blancas" se calcula una forma clausal de su negación:

$$\begin{array}{lll}
 & \neg(\exists x)[D(x) \wedge B(x)] & \\
\equiv & (\forall x)\neg(D(x) \wedge B(x)) & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg D(x) \vee \neg B(x)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg D(x), \neg B(x)\}\} &
\end{array}$$

Una refutación por resolución de las cláusulas obtenidas es

1	$\{\neg P(x), N(x), D(f(x))\}$	
2	$\{\neg P(x), N(x), M(f(x),x)\}$	
3	$\{P(a)\}$	
4	$\{B(a)\}$	
5	$\{\neg M(y,a), B(y)\}$	
6	$\{\neg P(x), \neg M(x,x)\}$	
7	$\{\neg B(x), \neg N(x)\}$	
8	$\{\neg D(x), \neg B(x)\}$	
9	$\{\neg D(x), \neg M(x,a)\}$	Resolvente de 8 y 5 con $\sigma = [y/x]$
10	$\{\neg D(f(a)), \neg P(a), N(a)\}$	Resolvente de 9 y 2 con $\theta_2 = [x/y]$ y $\sigma = [y/a, x/f(a)]$
11	$\{\neg D(f(a)), N(a)\}$	Resolvente de 10 y 3
12	$\{\neg P(a), N(a)\}$	Resolvente de 11 y 1
13	$\{N(a)\}$	Resolvente de 12 y 3
14	$\{\neg B(a)\}$	Resolvente de 13 y 7
15	$\square$	Resolvente de 14 y 4

Ejercicio 13 *Este ejercicio tiene dos apartados.*

1. *Consideremos el lenguaje de primer orden* $L_1 = \{P, f\}$ *y las fórmulas de* L_1*:*

$F_1 : (\forall x)(\exists y)P(x, f(y))$, $F_2 : (\exists y)(\forall x)P(x, f(y))$ y $F_3 : (\exists y)(\forall x)P(x, y)$.

(a) Hállese una L_1 estructura, $\mathcal{I}$, tal que $\mathcal{I} \models F_1$ pero $\mathcal{I} \not\models F_2$.

(b) Hállese una L_1 estructura, $\mathcal{I}'$, tal que $\mathcal{I}' \models F_3$ pero $\mathcal{I}' \not\models F_2$.

2. Consideremos ahora el lenguaje $L_2 = \{a, b, P, Q\}$ y la fórmula, F, siguiente:

$$(\forall x)(\exists y)[P(x, y) \wedge \neg Q(x, a)].$$

Hállese un modelo de Herbrand de F.

Solución:

Solución del apartado (1a): Sea $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}$, $f^I = \{(1, 1), (2, 2)\}$ (es decir, la identidad en U) y $P^I = \{(1, 1), (2, 2)\}$ (es decir, la igualdad en U). Entonces, $\mathcal{I} \models F_1$ pero $\mathcal{I} \not\models F_2$.

Solución del apartado (1b): Sea $\mathcal{I}' = (U', I')$ con $U' = \{1, 2\}$, $f^{I'} = \{(1, 2), (2, 2)\}$ (es decir, la constante 2 en U) y $P^{I'} = \{(1, 2), (2, 2)\}$ (es decir, la relación menor o igual en U). Entonces, $\mathcal{I}' \models F_3$ pero $\mathcal{I}' \not\models F_2$.

Solución del apartado (2a): El universo de Herbrand de L_2 es UH $= \{a, b\}$. Un modelo de Herbrand de F es $I = \{P(a, a), P(a, b), P(b, a), P(b, b)\}$.

Examen de Septiembre de 2002

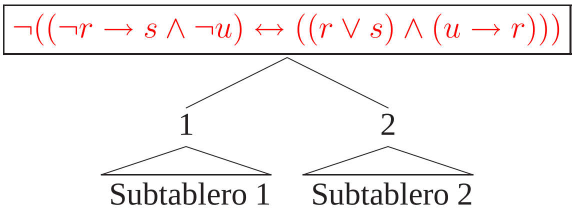
Ejercicio 14 *Sean* $A : \neg r \to s \land \neg u$, $B : (r \lor s) \land (u \to r)$ *y* U *el conjunto de fórmulas:*

$$U = \{q \lor r \lor s, r \to q \lor t, q \to \neg p, t \to u, u \to \neg s, p\}$$

- *(a) Pruébese, mediante tableros semánticos que* A *y* B *son lógicamente equivalentes.*
- *(b) Hállense, razonadamente, todos los modelos de* U*. ¿Es* U *consistente?*
- *(c) Pruébese, mediante resolución lineal, que la fórmula* A *es consecuencia lógica de* U*.*
- *(d) Decídase razonadamente si la fórmula* $\neg B$ *es, o no, consecuencia lógica de* U*.*

Solución:

Solución del apartado (a): El tablero semántico de $\neg(A \leftrightarrow B)$ es



donde el subtablero 1 se muestra en la Figura 2 (página 34) y el subtablero 2 en la Figura 3 (página35)

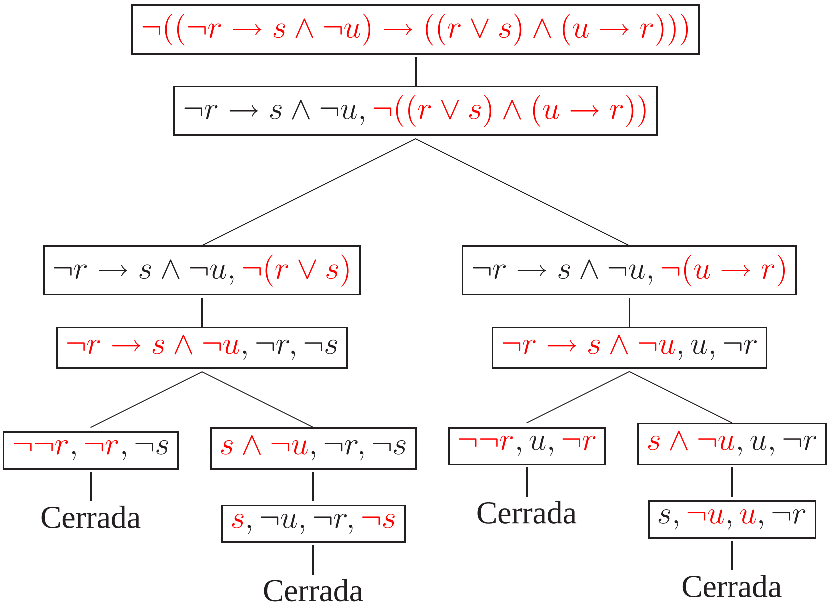


Figura 2: Subtablero 1

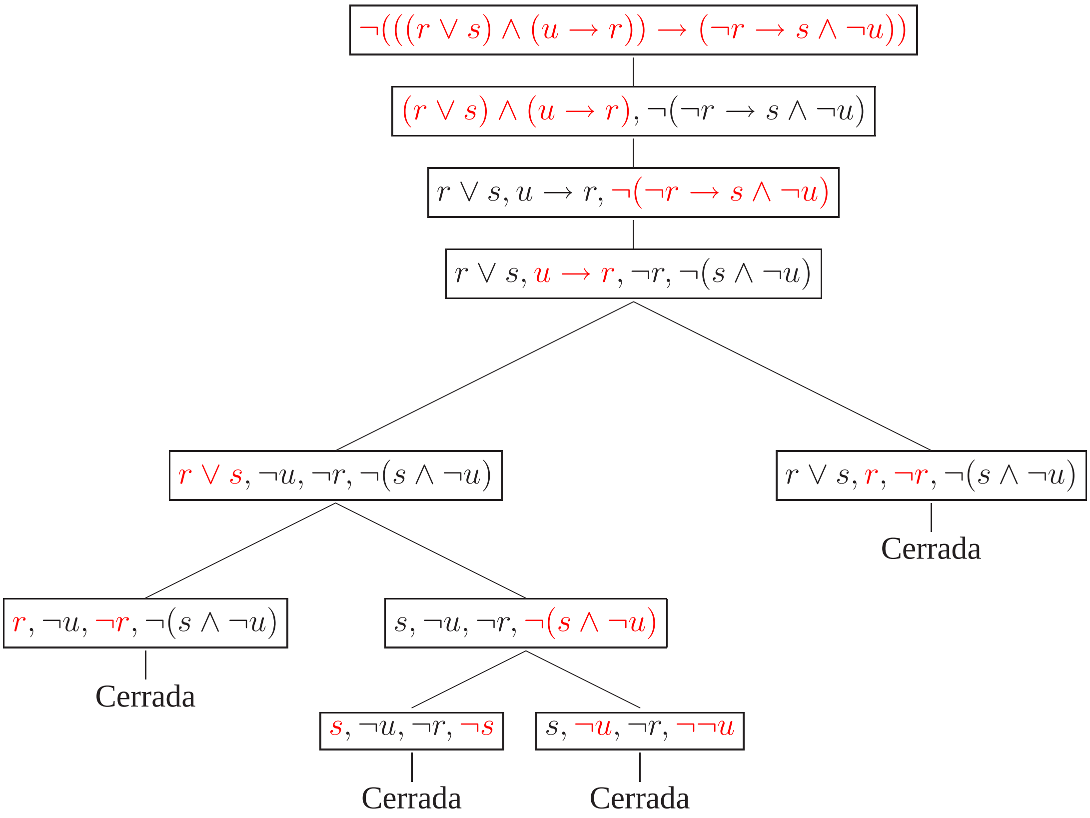


Figura 3: Subtablero 2

Al tener todas sus hojas cerradas, A y B son equivalentes.

Solución del apartado (b): Consideremos las fórmulas de U:

$$\begin{array}{ll} F_1: & q \lor r \lor s \\ F_2: & r \to q \lor t \\ F_3: & q \to \neg p \\ F_4: & t \to u \\ F_5: & u \to \neg s \\ F_6: & p \end{array}$$

Sea v un modelo de U. Por F_6, se tiene

$$v(p) = 1 \tag{1}$$

Por (1) y F_3,

$$v(q) = 0 \tag{2}$$

Por (2) y F_1,

$$v(r \lor s) = 1 \tag{3}$$

Por (3), se distingue dos casos. En el primer caso,

$$v(r) = 1 \tag{4}$$

Por (4) F_2 y (2),

$$v(t) = 1 \tag{5}$$

Por (5) y F_4,

$$v(u) = 1 \tag{6}$$

Por (6) y F_5,

$$v(s) = 0 \tag{7}$$

Por tanto, hemos encontrado un modelo v_1 tal que

$$v_1(p) = 1, v_1(q) = 0, v_1(r) = 1, v_1(s) = 0, v_1(t) = 1, v_1(u) = 1$$

En el segundo caso,

$$v(r) = 0 \tag{4'}$$

Por (4') y (3),

$$v(s) = 1 \tag{5'}$$

Por (5') y F_5,

$$v(u) = 0 \tag{6'}$$

Por (6') y F_4,

$$v(t) = 0 \tag{7'}$$

Por tanto, hemos encontrado otro modelo v_2 tal que

$$v_2(p) = 1, v_2(q) = 0, v_2(r) = 0, v_2(s) = 1, v_2(t) = 0, v_2(u) = 0$$

Puesto que U tiene modelos, es consistente.

Solución del apartado 3: En primer lugar, calculamos las formas clausales de las fórmulas de U y de la fórmula $\neg A$:

$$\begin{array}{lll}
F_1 : q \lor r \lor s & \equiv \{\{q, r, s\}\} & \\
F_2 : r \to q \lor t & \equiv \neg r \lor q \lor t & \text{[por (2)]} \\
 & \equiv \{\{\neg r, q, t\}\} & \\
F_3 : q \to \neg p & \equiv \neg q \lor \neg p & \text{[por (2)]} \\
 & \equiv \{\{\neg q, \neg p\}\} & \\
F_4 : t \to u & \equiv \neg t \lor u & \text{[por (2)]} \\
 & \equiv \{\{\neg t, u\}\} & \\
F_5 : u \to \neg s & \equiv \neg u \lor \neg s & \text{[por (2)]} \\
 & \equiv \{\{\neg u, \neg s\}\} & \\
F_6 : p & \equiv \{\{p\}\} & \\
\neg A : \neg(\neg r \to s \land \neg u) & \equiv \neg(\neg\neg r \lor (s \land \neg u)) & \text{[por (2)]} \\
 & \equiv \neg(r \lor (s \land \neg u)) & \text{[por (5)]} \\
 & \equiv \neg r \land \neg(s \land \neg u)) & \text{[por (4)]} \\
 & \equiv \neg r \land (\neg s \lor \neg\neg u)) & \text{[por (3)]} \\
 & \equiv \neg r \land (\neg s \lor u)) & \text{[por (5)]} \\
 & \equiv \{\{\neg r\}\}, \{\neg s, u\}\} &
\end{array}$$

Una resolución lineal con las cláusulas obtenidas es

1	$\{q, r, s\}$	
2	$\{\neg r, q, t\}$	
3	$\{\neg q, \neg p\}$	
4	$\{\neg t, u\}$	
5	$\{\neg u, \neg s\}$	
6	$\{p\}$	
7	$\{\neg r\}$	
8	$\{\neg s, u\}$	
9	$\{q, r, u\}$	Resolvente de 1 y 8
10	$\{q, r, \neg s\}$	Resolvente de 9 y 5
11	$\{q, r\}$	Resolvente de 10 y 1
12	$\{q\}$	Resolvente de 11 y 7
13	$\{\neg p\}$	Resolvente de 12 y 3
14	$\square$	Resolvente de 13 y 6

Solución del apartado (d): Puesto que los modelos de U, calculados en el apartado (b), son las valoraciones v_1 y v_2 tales que

$$\begin{array}{l} v_1(p) = 1, v_1(q) = 0, v_1(r) = 1, v_1(s) = 0, v_1(t) = 1, v_1(u) = 1 \\ v_2(p) = 1, v_2(q) = 0, v_2(r) = 0, v_2(s) = 1, v_2(t) = 0, v_2(u) = 0 \end{array}$$

para determinar si $\neg B$ es consecuencia de U basta calcular el valor de $\neg B$ en dichas valoraciones.

$$\begin{aligned} v_1(\neg((r \vee s) \wedge (u \rightarrow r))) &= H_\neg(v_1(r \vee s) \wedge (u \rightarrow r)) \\ &= H_\neg(H_\wedge(v_1(r \vee s), v_1(u \rightarrow r))) \\ &= H_\neg(H_\wedge(H_\vee(v_1(r), v_1(s)), H_\rightarrow(v_1(u), v_1(r)))) \\ &= H_\neg(H_\wedge(H_\vee(1, 0), H_\rightarrow(1, 1))) \\ &= H_\neg(H_\wedge(1, 1)) \\ &= H_\neg(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $\neg B$ no es consecuencia de U.

Nótese que el cálculo anterior puede simplificarse (por el método de Quine) en

$$\begin{array}{cccccccccccc} \neg & (& (& r & \vee & s &) & \wedge & (& u & \rightarrow & r\;))) \\ 0 & & & 1 & 1 & 0 & & 1 & & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Ejercicio 15 *Consideremos el lenguaje de primer orden $L = \{a, P, Q\}$ (siendo a un símbolo de constante y P y Q predicados de aridad 1). Sea F la fórmula de L*

$$(\forall x)[P(x) \rightarrow (Q(x) \vee Q(a))] \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)[Q(x) \vee Q(a)])$$

(a) Obténganse formas clausales para F y $\neg F$.

(b) Pruébese, utilizando resolución básica, que F es lógicamente válida.

(c) Descríbase un modelo de Herbrand de F.

Solución:

Solución del apartado (a): Cálculo de una forma clausal de F:

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)[P(x) \rightarrow (Q(x) \lor Q(a))] \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)[Q(x) \lor Q(a)]) & \\
\equiv & (\forall x)[P(x) \rightarrow (Q(x) \lor Q(a))] \rightarrow ((\exists y)P(y) \rightarrow (\exists z)[Q(z) \lor Q(a)]) & \text{[rectificación]} \\
\equiv & \neg(\forall x)[\neg P(x) \lor (Q(x) \lor Q(a))] \lor (\neg(\exists y)P(y) \lor (\exists z)[Q(z) \lor Q(a)]) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\exists x)\neg(\neg P(x) \lor (Q(x) \lor Q(a))) \lor ((\forall y)\neg P(y) \lor (\exists z)[Q(z) \lor Q(a)]) & \text{[por (8) y (9)]} \\
\equiv & (\exists x)[\neg\neg P(x) \land \neg(Q(x) \lor Q(a))) \lor ((\forall y)\neg P(y) \lor (\exists z)[Q(z) \lor Q(a)]) & \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\exists x)[P(x) \land (\neg Q(x) \land \neg Q(a))] \lor ((\forall y)\neg P(y) \lor (\exists z)[Q(z) \lor Q(a)]) & \text{[por (7) y (6)]} \\
\equiv & (\exists x)[(P(x) \land (\neg Q(x) \land \neg Q(a))) \lor ((\forall y)\neg P(y) \lor (\exists z)[Q(z) \lor Q(a)])] & \text{[por (14)]} \\
\equiv & (\exists x)[(P(x) \land (\neg Q(x) \land \neg Q(a))) \lor (\exists z)[(\forall y)\neg P(y) \lor (Q(z) \lor Q(a))]] & \text{[por (18)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists z)[(P(x) \land (\neg Q(x) \land \neg Q(a))) \lor (\forall y)[\neg P(y) \lor (Q(z) \lor Q(a))]] & \text{[por (12)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists z)(\forall y)[(P(x) \land (\neg Q(x) \land \neg Q(a))) \lor (\neg P(y) \lor (Q(z) \lor Q(a)))] & \text{[por (16)]} \\
\equiv_{sat} & (\forall y)[(P(b) \land (\neg Q(b) \land \neg Q(a))) \lor (\neg P(y) \lor (Q(c) \lor Q(a)))] & \text{[Skolem]} \\
\equiv & (\forall y)[(P(b) \lor (\neg P(y) \lor (Q(c) \lor Q(a))))\land & \\
 & \qquad (\neg Q(b) \lor (\neg P(y) \lor (Q(c) \lor Q(a))))\land & \\
 & \qquad (\neg Q(a) \lor (\neg P(y) \lor (Q(c) \lor Q(a))))] & \text{[distributiva]} \\
\equiv & (\forall y)[(P(b) \lor (\neg P(y) \lor (Q(c) \lor Q(a))))\land & \\
 & \qquad (\neg Q(b) \lor (\neg P(y) \lor (Q(c) \lor Q(a))))] & \text{[tautología]} \\
\equiv & \{\{P(b), \neg P(y), Q(c), Q(a)\}, \{\neg Q(b), \neg P(y), Q(c), Q(a)\}\} &
\end{array}$$

2.– Cálculo de una forma clausal de $\neg F$:

$$\begin{array}{lll}
 & \neg((\forall x)[P(x) \rightarrow (Q(x) \lor Q(a))] \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)[Q(x) \lor Q(a)])) & \\
\equiv & \neg((\exists x)[P(x) \land (\neg Q(x) \land \neg Q(a))] \lor ((\forall y)\neg P(y) \lor (\exists z)[Q(z) \lor Q(a)]) & \text{[por anterior]} \\
\equiv & \neg(\forall y)(\exists x)(\exists z)[(P(x) \land (\neg Q(x) \land \neg Q(a))) \lor (\neg P(y) \lor (Q(z) \lor Q(a)))] & \text{[por (12)–(18)]} \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)(\forall z)\neg[(P(x) \land (\neg Q(x) \land \neg Q(a))) \lor (\neg P(y) \lor (Q(z) \lor Q(a)))] & \text{[por (8) y (9)]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall z)\neg[(P(x) \land (\neg Q(x) \land \neg Q(a))) \lor (\neg P(b) \lor (Q(z) \lor Q(a)))] & \text{[por Skolem]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall z)[\neg(P(x) \land (\neg Q(x) \land \neg Q(a))) \land \neg(\neg P(b) \lor (Q(z) \lor Q(a)))] & \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \lor \neg(\neg Q(x) \land \neg Q(a))) \land (\neg\neg P(b) \land \neg(Q(z) \lor Q(a)))] & \text{[por (5) y (6)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \lor (\neg\neg Q(x) \lor \neg\neg Q(a))) \land (P(b) \land (\neg Q(z) \land \neg Q(a)))] & \text{[por (5), (6) y (7)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \lor (Q(x) \lor Q(a))) \land (P(b) \land (\neg Q(z) \land \neg Q(a)))] & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x), Q(x), Q(a)\}, \{P(b)\}, \{\neg Q(z)\}, \{\neg Q(a)\}\} &
\end{array}$$

Solución del apartado (b): Sustituyendo en la forma clausal de $\neg F$ calculada anteriormente, la x y la z por b se obtiene un conjunto de cláusulas que tienen una refutación básica. En efecto,

1	$\{\neg P(b), Q(b), Q(a)\}$	
2	$\{P(b)\}$	
3	$\{\neg Q(b)\}$	
4	$\{\neg Q(a)\}$	
5	$\{Q(b), Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 5 y 3
7	$\square$	Resolvente de 6 y 4

Solución del apartado (c): A la vista de la forma clausal de F del apartado (a), se observa que un modelo de Herbrand de F es el conjunto vacío (es decir, ningún elemento verifica P ni ninguno verifica Q).

Ejercicio 16 *Consideremos el LPO $L = \{a, b, P, Q, R, T\}$. Escríbanse fórmulas de L que expresen las siguientes afirmaciones:*

1. *Pilar dirigió algún drama pero no dirigió ninguna comedia.*
2. *Pedro dirigió una comedia de mayor duración que cualquiera de las dirigidas por Pilar.*
3. *Pedro no dirigió comedias salvo que Pilar dirigiera algún drama.*
4. *Pilar dirigió todo drama que no dirigió Pedro.*

$P(x)$ expresará que "x es una comedia", $Q(x)$ que "x es un drama", $R(x, y)$ expresará que "x dirigió y" y $T(x, y)$ que "x es de mayor duración que y". Las constantes a y b denotarán, respectivamente, a Pedro y a Pilar.

Solución:

1. Pilar dirigió algún drama pero no dirigió ninguna comedia.
   $$(\exists y)[Q(y) \land R(b, y)] \land \neg(\exists z)[P(z) \land R(b, y)]$$
2. Pedro dirigió una comedia de mayor duración que cualquiera de las dirigidas por Pilar.
   $$(\exists x)[P(x) \land R(a, x) \land (\forall y)[P(y) \land R(b, y) \to T(x, y)]]$$
3. Pedro no dirigió comedias salvo que Pilar dirigiera algún drama.
   $$(\exists x)[P(x) \land R(a, x)] \to (\exists y)[Q(y) \land R(b, y)]$$
4. Pilar dirigió todo drama que no dirigió Pedro.
   $$(\forall x)[Q(x) \land \neg R(a, x) \to R(b, x)]$$

Ejercicio 17 *Consideremos las fórmulas del LPO, $L = \{P, Q\}$*

$F_1 : (\exists x)[P(x) \land Q(x)].$
$F_2 : (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x),$
$F_3 : (\exists x)(\exists y)[P(x) \land Q(y)]$

(a) Hállese una L estructura $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models F_2$ pero $\mathcal{I} \not\models F_1$.

(b) Pruébese que todo modelo de F_1 es modelo de F_2.

(c) Pruébese que F_2 y F_3 son lógicamente equivalentes.

Solución:

Solución del apartado (a): Vamos a buscar formas clausales de F_2 y $\neg F_1$ y saturar por resolución el conjunto de las cláusulas obtenidas para hallar un modelo de Herbrand de $\{F_2, \neg F_1\}$.

$$\begin{array}{lll}
F_2 : & (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) & \\
\equiv & (\exists x)P(x) \wedge (\exists y)Q(y) & \text{[rectificación]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)[P(x) \wedge Q(y)] & \text{[por (11)–(18)]} \\
\equiv_{sat} & P(a) \wedge Q(b) & \text{[por Skolem]} \\
\equiv & \{\{P(a)\}, \{Q(b)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\neg F_1 : & \neg(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] & \\
\equiv & (\forall x)\neg(P(x) \wedge Q(x)) & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg P(x) \vee \neg Q(x)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg Q(x)\}\} &
\end{array}$$

Las cláusulas obtenidas son

1 $\{P(a)\}$
2 $\{Q(b)\}$
3 $\{\neg P(x), \neg Q(x)\}$

Veamos el proceso de saturación, por resolución:
Al resolver 1 con 1 no se obtiene resolvente.
Al resolver 2 con 1 y 2 no se obtiene resolvente.
Al resolver 3 con 1, 2 y 3 se obtiene
4 $\{\neg Q(a)\}$ (resolvente de 3 y 1)
5 $\{\neg P(b)\}$ (resolvente de 3 y 2)
Al resolver 4 con 1, 2, 3 y 4 no se obtiene resolvente.
Al resolver 5 con 1, 2, 3, 4 y 5 no se obtiene resolvente.

A la vista del saturado, un modelo es $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}, P^I = \{a\}, Q^I = \{b\}$.

Solución del apartado (b): Probar que todo modelo de F_1 es modelo de F_2, equivale a probar que $F_1 \models F_2$ que, a su vez, equivale a probar que $\{F_1, \neg F_2\}$ es inconsistente. Probaremos la última condición por resolución. Para ello, empezamos calculando unas formas clausales de F_1 y $\neg F_2$.

$$\begin{array}{lll}
F_1 : & (\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] & \\
\equiv_{sat} & P(a) \wedge Q(a) & \text{[por Skolem]} \\
\equiv & \{\{P(a)\}, \{Q(a)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\neg F_2 : & \neg((\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)) & \\
\equiv & \neg(\exists x)(\exists y)[P(x) \land Q(y)] & \text{[por apartado (a)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)\neg(P(x) \land Q(y)) & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x) \lor \neg Q(y)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg Q(y)\}\} &
\end{array}$$

La resolución es

$$\begin{array}{lll}
1 & \{P(a)\} & \\
2 & \{Q(a)\} & \\
3 & \{\neg P(x), \neg Q(y)\} & \\
4 & \{\neg Q(y)\} & \text{Resolvente de } 1 \text{ y } 3 \\
5 & \square & \text{Resolvente de } 4 \text{ y } 2
\end{array}$$

Solución del apartado (c): Para probar que F_2 y F_3 son lógicamente equivalentes, basta probar que $F_2 \models F_3$ y $F_3 \models F_2$. Lo haremos por resolución. Para ello, necesitaremos formas clausales de F_2, $\neg F_2$, F_3 y $\neg F_3$.

$$\begin{array}{lll}
F_2 : & (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x) & \\
\equiv_{sat} & \{\{P(a)\}, \{Q(b)\}\} & \text{[por anterior]}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\neg F_2 : & \neg((\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)) & \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg Q(y)\}\} & \text{[por anterior]}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
F_3 : & (\exists x)(\exists y)[P(x) \land Q(y)] & \\
\equiv_{sat} & P(c) \land Q(d) & \text{[por Skolem]} \\
\equiv & \{\{P(c)\}, \{Q(d)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\neg F_3 : & \neg(\exists x)(\exists y)[P(x) \land Q(y)] & \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)\neg(P(x) \land Q(y)) & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x) \lor \neg Q(y)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x) \lor \neg Q(y)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg Q(y)\}\} &
\end{array}$$

Demostración, por resolución, de $F_2 \models F_3$:

$$\begin{array}{lll}
1 & \{P(a)\} & \\
2 & \{Q(b)\} & \\
3 & \{\neg P(x), \neg Q(y)\} & \\
4 & \{\neg Q(y)\} & \text{Resolvente de } 1 \text{ y } 3 \\
5 & \square & \text{Resolvente de } 4 \text{ y } 2
\end{array}$$

Demostración, por resolución, de $F_3 \models F_2$:

1	$\{P(c)\}$	
2	$\{Q(d)\}$	
3	$\{\neg P(x), \neg Q(y)\}$	
4	$\{\neg Q(y)\}$	Resolvente de 1 y 3
5	$\square$	Resolvente de 4 y 2

Curso 2002–03

Examen de Junio de 2003

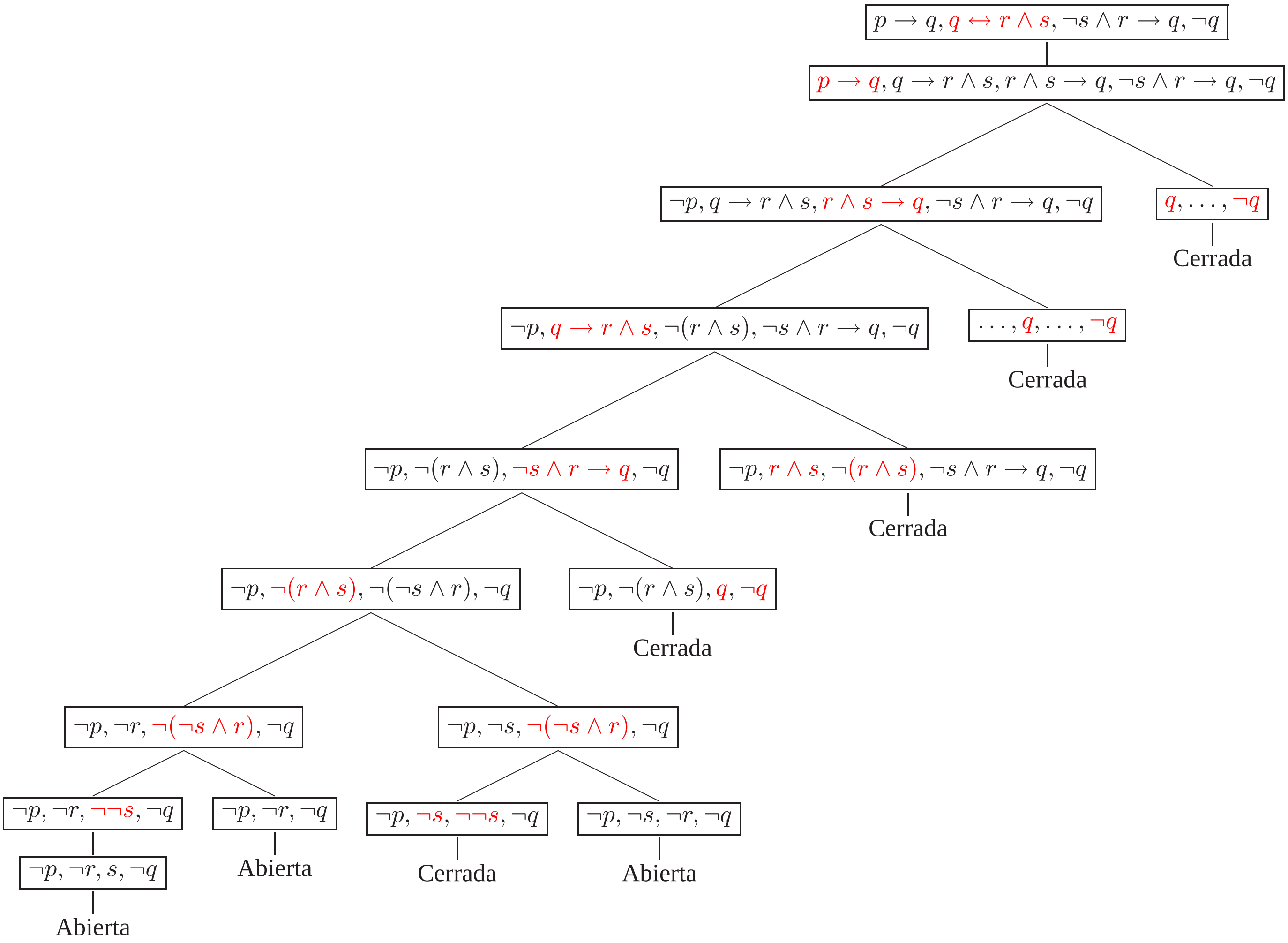
Ejercicio 18 *Consideremos los conjuntos de fórmulas:*

$$\begin{aligned} S &= \{p \to q, q \leftrightarrow r \land s, \neg s \land r \to q, \neg q\} \\ T &= \{q \lor r, \neg q \lor \neg r\} \end{aligned}$$

1. *Pruébese, mediante tableros semánticos, que S es consistente.*
2. *Obténganse, razonadamente, todos los modelos de S.*
3. *Pruébese, mediante resolución lineal, que $S \cup T$ es inconsistente.*
4. *Teniendo en cuenta los apartados anteriores, obténgase una fórmula F, formada exclusivamente por las variables q y r, tal que: $F \notin TAUT$ y $S \models F$.*

Solución:

Solución del apartado 1: Un tablero semántico de S es



Al tener hojas abiertas, el conjunto S es consistente.

Solución del apartado 2: La hojas abiertas son

$$\begin{array}{l}
S_1 = \{\neg p, \neg q, \neg r, s\} \\
S_2 = \{\neg p, \neg q, \neg r\} \\
S_3 = \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}
\end{array}$$

Por tanto, los modelos de S son las valoraciones v tales que $v(p) = v(q) = v(r) = 0$.

Solución del apartado 3: En primer lugar, tenemos que calcular las formas clausales de las fórmulas de $S \cup T$.

$$\begin{array}{lll}
p \rightarrow q & \equiv \neg p \vee q & \text{[por (2)]} \\
 & \equiv \{\{\neg p, q\}\} & \\
q \leftrightarrow r \wedge s & \equiv (q \rightarrow r \wedge s) \wedge (r \wedge s \rightarrow q) & \text{[por (1)]} \\
 & \equiv (\neg q \vee (r \wedge s)) \wedge (\neg(r \wedge s) \vee q) & \text{[por (2)]} \\
 & \equiv (\neg q \vee (r \wedge s)) \wedge ((\neg r \vee \neg s) \vee q) & \text{[por (3)]} \\
 & \equiv ((\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee s)) \wedge ((\neg r \vee \neg s) \vee q) & \text{[por (6)]} \\
 & \equiv \{\{\neg q, r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r, \neg s, q\}\} & \\
\neg s \wedge r \rightarrow q & \equiv \neg(\neg s \wedge r) \vee q & \text{[por (2)]} \\
 & \equiv (\neg\neg s \vee \neg r) \vee q & \text{[por (3)]} \\
 & \equiv (s \vee \neg r) \vee q & \text{[por (5)]} \\
 & \equiv \{\{s, \neg r, q\}\} & \\
\neg q & \equiv \{\{\neg q\}\} & \\
q \vee r & \equiv \{\{q, r\}\} & \\
\neg q \vee \neg r & \equiv \{\{\neg q, \neg r\}\} &
\end{array}$$

Una resolución lineal con las cláusulas obtenidas es

1	$\{\neg p, q\}$	
2	$\{\neg q, r\}$	
3	$\{\neg q, s\}$	
4	$\{\neg r, \neg s, q\}$	
5	$\{s, \neg r, q\}$	
6	$\{\neg q\}$	
7	$\{q, r\}$	
8	$\{\neg q, \neg r\}$	
9	$\{s, q\}$	Resolvente de 7 y 5
10	$\{q, \neg r\}$	Resolvente de 9 y 4
11	$\{q\}$	Resolvente de 10 y 7
12	$\Box$	Resolvente de 11 y 6

Solución del apartado 4: Puesto que en cualquier modelo v de S se verifica que $v(q) = v(r) = 0$, entonces la fórmula $\neg q \wedge \neg r$ es una consecuencia no tautológica de S.

Ejercicio 19 *Supongamos conocidos los siguientes hechos acerca del número de aprobados de dos asignaturas A y B:*

1. *Si todos los alumnos aprueban la asignatura A, entonces todos aprueban la asignatura B.*
2. *Si algún delegado de la clase aprueba A y B, entonces todos los alumnos aprueban A.*
3. *Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.*
4. *Si Manuel no aprueba B, entonces nadie aprueba B.*

Se pide:

(a) *Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los siguientes símbolos de predicado:* $D(x)$*: "*x *es un delegado",* $Ap(x, y)$*: "*x *aprueba la asignatura* y*". Las constantes* a, b, m *denotarán la asignatura A, la asignatura B y a Manuel, respectivamente.*

(b) *Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas del apartado anterior.*

(c) *Probar, mediante resolución, que si Manuel es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B.*

Solución:

Solución del apartado (a) Formalización:

1. Si todos los alumnos aprueban la asignatura A, entonces todos aprueban la asignatura B.
   $(\forall x)Ap(x, a) \rightarrow (\forall y)Ap(y, b)$.

2. Si algún delegado de la clase aprueba A y B, entonces todos los alumnos aprueban A.
   $(\exists x)[D(x) \wedge Ap(x, a) \wedge Ap(x, b)] \rightarrow (\forall y)Ap(y, a)$.

3. Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.
   $\neg(\exists x)Ap(x, b) \rightarrow \neg(\exists y)[D(y) \wedge Ap(y, a)]$.

4. Si Manuel no aprueba B, entonces nadie aprueba B.
   $\neg Ap(m, b) \rightarrow \neg(\exists x)Ap(x, b)$.

Solución del apartado (b) Formas clausales:

1 $\{\neg Ap(c, a), Ap(y, b)\}$
2 $\{\neg D(x), \neg Ap(x, a), \neg Ap(x, b), Ap(y, a)\}$
3 $\{Ap(d, b), \neg D(y), \neg Ap(y, a)\}$
4 $\{Ap(m, b), \neg Ap(x, b)\}$

donde c, d y e son constantes de Skolem.

Solución del apartado (c) Resolución:

Antes de hacer la resolución se formaliza la negación de la conclusión (Si Manuel es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B):

$\neg(D(m) \wedge Ap(m,a) \to (\forall x)[Ap(x,a) \wedge Ap(x,b)])$

y se calcula las cláusulas correspondientes:

5 $\{D(m)\}$
6 $\{Ap(m,a)\}$
7 $\{\neg Ap(e,a), \neg Ap(e,b)\}$

La resolución es

1	$\{\neg Ap(c,a), Ap(y,b)\}$	
2	$\{\neg D(x), \neg Ap(x,a), \neg Ap(x,b), Ap(y,a)\}$	
3	$\{Ap(d,b), \neg D(y), \neg Ap(y,a)\}$	
4	$\{Ap(m,b), \neg Ap(x,b)\}$	
5	$\{D(m)\}$	
6	$\{Ap(m,a)\}$	
7	$\{\neg Ap(e,a), \neg Ap(e,b)\}$	
8	$\{Ap(d,b), \neg Ap(m,a)\}$	Resolvente de 5.1 y 3.2
9	$\{Ap(d,b)\}$	Resolvente de 8.2 y 6.1
10	$\{Ap(m,b)\}$	Resolvente de 9.1 y 4.2
11	$\{\neg D(m), \neg Ap(m,a), Ap(y,a)\}$	Resolvente de 10.1 y 2.3
12	$\{\neg Ap(m,a), Ap(y,a)\}$	Resolvente de 11.1 y 5.1
13	$\{Ap(y,a)\}$	Resolvente de 12.1 y 6.1
14	$\{Ap(y,b)\}$	Resolvente de 13.1 y 1.1
15	$\{\neg Ap(e,b)\}$	Resolvente de 7.1 y 13.1
16	$\square$	Resolvente de 15.1 y 14.1

Ejercicio 20 *El ejercicio tiene dos apartados.*

1. *Consideramos el lenguaje* $L_1 = \{P, f, a, b, c\}$ *y el conjunto de fórmulas:*

$$S = \{P(c,a) \to (\forall z)P(z,b), (\forall x)[P(f(x),x) \to (\forall z)P(z,x)], \neg P(b,c)\}$$

Pruébese, proporcionando un modelo de Herbrand, que $S \not\models P(f(a),a) \vee \neg P(f(b),b)$*.*

2. *Consideramos el lenguaje* $L_2 = \{a, b, P\}$*. Sea* F *la fórmula*

$$\neg P(x,a) \wedge \neg P(x,b) \wedge (\exists y)(\exists z)P(y,z)$$

Pruébese que F *es consistente y que NO tiene ningún modelo de Herbrand (en el lenguaje* L_2*). ¿Contradice esto el teorema de Herbrand? Razónese la respuesta.*

Solución:

Solución del apartado (1): Las formas clausales de las fórmulas del problema son:

- de $P(c,a) \rightarrow (\forall z)P(z,b)$, $S_1 = \{\{\neg P(c,a), P(z,b)\}\}$;
- de $(\forall x)[P(f(x),x) \rightarrow (\forall z)P(z,x)]$, $S_2 = \{\{\neg P(f(x),x), P(z,x)\}\}$;
- de $\neg P(b,c)$, $S_3 = \{\{\neg P(b,c)\}\}$;
- de $\neg(P(f(a),a) \vee \neg P(f(b),b))$, $S_4 = \{\{\neg P(f(a),a)\}, \{P(f(b),b)\}\}$.

Vamos a calcular la saturación, por resolución y factorización, de $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. Las cláusulas iniciales son

$1 \quad \{\neg P(c,a), P(z,b)\}$
$2 \quad \{\neg P(f(x),x), P(z,x)\}$
$3 \quad \{\neg P(b,c)\}$
$4 \quad \{\neg P(f(a),a)\}$
$5 \quad \{P(f(b),b)\}$

Al resolver 3 con 3 no se obtiene resolvente.
Al resolver 4 con 3 y 4 no se obtiene resolvente.
Al resolver 5 con 3, 4 y 5 no se obtiene resolvente.
Al resolver 1 con 3, 4, 5 y 1 no se obtiene resolvente.
Al resolver 2 con 3, 4, 5, 1 y 2 se obtiene
6 $\{P(z,b)\}$ (resolvente de 2 y 5) y
7 $\{\neg P(f(c),c)\}$ (resolvente de 2 y 3)
La cláusula 6 subsume a la 1 y a la 5
Al resolver 6 con 3, 4, 2 y 6 no se obtiene resolvente.
Al resolver 7 con 3, 4, 2, 6 y 7 no se obtiene resolvente.

Por tanto, el saturado es

$2 \quad \{\neg P(f(x),x), P(z,x)\}$
$3 \quad \{\neg P(b,c)\}$
$4 \quad \{\neg P(f(a),a)\}$
$6 \quad \{P(z,b)\}$
$7 \quad \{\neg P(f(c),c)\}$

El universo de Herbrand es $UH = \{a, f(a), f(f(a)), \dots, b, f(b), f(f(b)), \dots\ c, f(c), f(f(c)), \dots\}$ y un modelo de Herbrand es $I = \{P(z,b) : z \in UH\}$.

Solución del apartado (2): Para demostrar que F es consistente basta mostrar una estructura $\mathcal{I}$ deL_2 y una asignación A en $\mathcal{I}$ tales que $\mathcal{I}_A \models F$. Sea $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1,2\}$, $a^I = 1$, $b^I = 1$ y $P^I = \{(1,2)\}$. Sea A tal que $A(x) = 1$. Entonces, $\mathcal{I}_A \models F$ (ya que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_A(F) &= \mathcal{I}_A(\neg P(x,a) \wedge \neg P(x,b) \wedge (\exists y)(\exists z)P(y,z)) \\
&= \mathcal{I}_A(\neg P(x,a)) \wedge \mathcal{I}_A(\neg P(x,b)) \wedge \mathcal{I}_A((\exists y)(\exists z)P(y,z)) \\
&= \mathsf{V}
\end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_A(\neg P(x,a)) &= \neg P^I(A(x), a^I) \\
&= \neg P^I(1,1) \\
&= \neg \mathsf{F} \\
&= \mathsf{V}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_A(\neg P(x,b)) &= \neg P^I(A(x), b^I) \\
&= \neg P^I(1,1) \\
&= \neg \mathsf{F} \\
&= \mathsf{V}
\end{aligned}$$

$\mathcal{I}_A((\exists y)(\exists z)P(y,z)) = \mathsf{V}$ porque

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{A[y/1,z/2]}(P(y,z)) &= P^I(1,2) \\
&= \mathsf{V}
\end{aligned} \quad)$$

Veamos que F no tiene ningún modelo de Herbrand (en el lenguaje L_2). El universo de Herbrand de L_2 es UH $= \{a, b\}$, la base de Herbrand es BH $= \{P(a,a), P(a,b), P(b,a), P(b,b)\}$. Las interpretaciones de Herbrand de L_2 son los 16 subconjuntos de BH. Sea I una interpretación de Herbrand de L_2. Demostraremos que $I \not\models F$ distinguiendo tres casos:

- Caso 1: $I = \emptyset$. Entonces, $I \not\models F$ (ya que $\emptyset \not\models (\exists y)(\exists z)P(y,z)$).
- Caso 2: $P(a,a) \in I$ ó $P(b,a) \in I$. Entonces, $I \not\models F$ (ya que $I \not\models \neg P(x,a)$).
- Caso 3: $P(a,b) \in I$ ó $P(b,b) \in I$. Entonces, $I \not\models F$ (ya que $I \not\models \neg P(x,b)$).

El que F sea consistente y no tenga modelo de Herbrand no contradice el teorema de Herbrand, ya que F no está en forma clausal (tiene un cuantificador existencial).

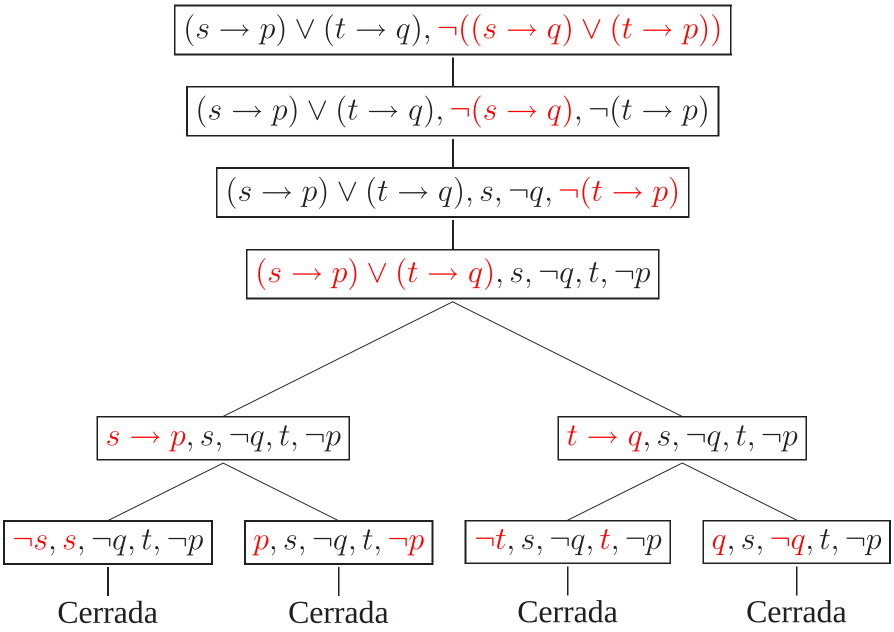
Examen de Septiembre de 2003

Ejercicio 21 *Dadas las fórmulas* $A : (s \to p) \lor (t \to q)$ *y* $B : (s \to q) \lor (t \to p)$*, se pide:*

1. *Pruébese que* $A \models B$*:*
   - *(a) Mediante tableros semánticos.*
   - *(b) Mediante resolución por entradas.*
2. *Descríbanse, razonadamente, todos los modelos de* A *y, a continuación, pruébese nuevamente que* $A \models B$*, utilizando la definición de consecuencia lógica.*
3. *¿Es* $\neg B \to \neg A$ *una tautología? Razónese la respuesta.*

Solución:

Solución del apartado (1.a): El tablero semántico de $\{A, \neg B\}$ es



Como todas las hojas son cerradas, $A \models B$.

Solución del apartado (1.b): En primer lugar, calculamos la forma clausal de A

$$\begin{aligned} (s \to p) \lor (t \to q) &\equiv (\neg s \lor p) \lor (\neg t \lor q) \quad \text{[por (2)]} \\ &\equiv \{\{\neg s, p, \neg t, q\}\} \end{aligned}$$

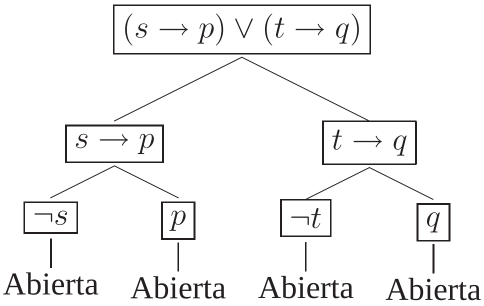
y la forma clausal de $\neg B$

$$\begin{array}{rll} \neg((s \to q) \vee (t \to p)) & \equiv \neg((\neg s \vee q) \vee (\neg t \vee p)) & \text{[por (2)]} \\ & \equiv \neg(\neg s \vee q) \wedge \neg(\neg t \vee p) & \text{[por (4)]} \\ & \equiv (\neg\neg s \wedge \neg q) \wedge (\neg\neg t \wedge \neg p) & \text{[por (4)]} \\ & \equiv (s \wedge \neg q) \wedge (t \wedge \neg p) & \text{[por (5)]} \\ & \equiv \{\{s\}, \{\neg q\}, \{t\}, \{\neg p\}\} & \end{array}$$

Una resolución por entradas de las cláusulas obtenidas es

$$\begin{array}{lll} 1 & \{\neg s, p, \neg t, q\} & \\ 2 & \{s\} & \\ 3 & \{\neg q\} & \\ 4 & \{t\} & \\ 5 & \{\neg p\}\} & \\ 6 & \{p, \neg t, q\} & \text{Resolvente de } 1 \text{ y } 2 \\ 7 & \{\neg t, q\} & \text{Resolvente de } 6 \text{ y } 5 \\ 8 & \{q\} & \text{Resolvente de } 6 \text{ y } 4 \\ 9 & \square & \text{Resolvente de } 8 \text{ y } 3 \end{array}$$

Solución del apartado 2: Para calcular los modelos de A construimos el tablero de A:



Los modelos de A son las cuatro interpretaciones I_j tales que $I_1(s) = 0$, $I_2(p) = 1$, $I_3(t) = 0$ ó $I_4(q) = 0$. Como las cuatro son modelos de B, se tiene que $A \not\models B$.

Solución del apartado 3: En el apartado anterior encontramos una interpretación I' tal que $I'(A) = 1$ y $I'(B) = 0$. Para dicha interpretación,

$$\begin{array}{rl} I'(\neg B \to \neg A) & = H_{\to}(I'(\neg B), I'(\neg A)) \\ & = H_{\to}(H_{\neg}(I'(B)), H_{\neg}(I'(A))) \\ & = H_{\to}(H_{\neg}(0), H_{\neg}(1)) \\ & = H_{\to}(1, 0)) \\ & = 0 \end{array}$$

Por tanto, $\neg B \to \neg A$ no es una tautología.

Ejercicio 22 *Este ejercicio tiene dos apartados.*

1. *Hallar las formas prenexa, de Skolem y clausal de la fórmula:*

$$\neg(\exists x)(\forall z)[P(x) \to \neg Q(z)] \vee ((\exists z)A(y, z) \to (\exists u)B(y, u))$$

2. *Consideremos el lenguaje* $L_1 = \{P, f, a, b\}$ *y el conjunto de fórmulas:*

   $S = \{(\forall x)[P(a,x) \to P(b,f(x))], (\forall x)[P(f(x),x) \to (\forall z)P(z,b)], P(a,f(a)) \land P(f(b),b)\}$

   Pruébese, proporcionando un modelo de Herbrand, que $S \not\models (\exists x)[P(x,a) \land P(f(x),b)]$.

Solución:

Solución del apartado 1:

1.– Forma prenexa:

$$\begin{array}{lll}
 & \neg(\exists x)(\forall z)[P(x) \to \neg Q(z)] \lor ((\exists z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u)) & \\
\equiv & \neg(\exists x)(\forall z)[P(x) \to \neg Q(z)] \lor ((\exists v)A(y,v) \to (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \neg(\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \lor \neg Q(z)] \lor (\neg(\exists v)A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists z)\neg(\neg P(x) \lor \neg Q(z)) \lor ((\forall v)\neg A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (8) y (9)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists z)[\neg\neg P(x) \land \neg\neg Q(z)] \lor ((\forall v)\neg A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists z)[P(x) \land Q(z)] \lor ((\forall v)\neg A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \land Q(z)) \lor (\neg A(y,v) \lor B(y,u))] & \text{[por (11)–(18)]}
\end{array}$$

2.– Forma de Skolem:

$$\begin{array}{lll}
 & (\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \land Q(z)) \lor (\neg A(y,v) \lor B(y,u))] & \\
\equiv_{sat} & (\exists y)(\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \land Q(z)) \lor (\neg A(y,v) \lor B(y,u))] & \text{[cierre existencial]} \\
\equiv_{sat} & (\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \land Q(z)) \lor (\neg A(c,v) \lor B(c,u))] & [c \text{ constante de Skolem}] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \land Q(z)) \lor (\neg A(c,v) \lor B(c,d))] & [d \text{ constante de Skolem}] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall v)[(P(x) \land Q(f(x))) \lor (\neg A(c,v) \lor B(c,d))] & [f \text{ función de Skolem}]
\end{array}$$

3.– Forma clausual:

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)(\forall v)[(P(x) \land Q(f(x))) \lor (\neg A(c,v) \lor B(c,d))] & \\
\equiv & (\forall x)(\forall v)[(P(x) \lor \neg A(c,v) \lor B(c,d)) \land [(Q(f(x)) \lor \neg A(c,v) \lor B(c,d))] & \text{[por (20)]} \\
\equiv & \{\{(P(x), \neg A(c,v), B(c,d)\}, \{Q(f(x)), \neg A(c,v), B(c,d)\}\} &
\end{array}$$

Solución del apartado 2: Las formas clausales de las fórmulas del problema son:

- de $(\forall x)[P(a,x) \to P(b,f(x))]$, $S_1 = \{\{\neg P(a,x), P(b,f(x))\}\}$;
- de $(\forall x)[P(f(x),x) \to (\forall z)P(z,b)]$, $S_2 = \{\{\neg P(f(x),x), P(z,b)\}\}$;
- de $P(a,f(a)) \land P(f(b),b)$, $S_3 = \{\{P(a,f(a))\}, \{P(f(b),b)\}\}$;
- de $\neg(\exists x)[P(x,a) \land P(f(x),b)$, $S_4 = \{\{\neg P(x,a), \neg P(f(x),b)\}\}$.

Vamos a calcular la saturación, por resolución y factorización, de $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. Las cláusulas iniciales son

1 $\{\neg P(a,x), P(b,f(x))\}$
2 $\{\neg P(f(x),x), P(z,b)\}$
3 $\{P(a,f(a))\}$
4 $\{P(f(b),b)\}$
5 $\{\neg P(x,a), \neg P(f(x),b)\}$

Al resolver 3 con 3 no se obtiene resolvente.
Al resolver 4 con 3 y 4 no se obtiene resolvente.
Al resolver 1 con 3, 4 y 1 se obtiene
6 $\{P(b,f(f(a)))\}$ (resolvente de 1 y 3).
Al resolver 6 con 3, 4, 1 y 6 no se obtiene resolvente.
Al resolver 2 con 3, 4, 1, 6 y 2 se obtiene
7 $\{P(z,b)\}$ (resolvente de 2 y 4) y
8 $\{-P(f(x),x), P(b,f(b))\}$ (resolvente de 2 y 1).
La cláusula 7 subsume a la 2 y a la 4.
Al resolver 7 con 3, 1, 6 y 7 se obtiene
9 $\{P(b,f(b))\}$ (resolvente de 7 y 1)
La cláusula 9 subsume a la 8
Al resolver 9 con 3, 1, 6, 7 y 9 no se obtiene resolventes.
Al resolver 5 con 3, 1, 6, 7, 9 y 5 se obtiene
10 $\{\neg P(x,a)\}$ (resolvente de 5 y 7) *La cláusula 10 subsume a la 5*

Por tanto, el saturado es
1 $\{\neg P(a,x), P(b,f(x))\}$
3 $\{P(a,f(a))\}$
6 $\{P(b,f(f(a)))\}$
7 $\{P(z,b)\}$
9 $\{P(b,f(b))\}$
10 $\{\neg P(x,a)\}$

El universo de Herbrand es $UH = \{a, f(a), f(f(a)), \dots, b, f(b), f(f(b)), \dots\}$ y un modelo de Herbrand es $I = \{P(a,f(a)), P(b,f(f(a))), P(b,f(b)), P(z,b) : z \in UH\}$

Ejercicio 23 *Consideremos los siguientes hechos acerca de la sucesión de los integrantes de la monarquía inglesa:*

1. *El primogénito de un rey hereda la corona de dicho rey.*
2. *Si alguien derrota a un rey entonces hereda su corona.*
3. *Si alguien hereda la corona de un rey entonces se convierte en rey.*
4. *Enrique VIII era el primogénito de Enrique VII.*
5. *Ricardo III era rey y Enrique VII derrotó a Ricardo III.*

Se pide:

(a) *Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los símbolos de predicado:* $D(x, y)$*:* x *derrota a* y*,* $H(x, y)$*:* x *hereda la corona de* y*,* $R(x)$*:* x *es rey,* $P(x, y)$*:* x *es el primogénito de* y*. Las constantes* a, b, c *denotarán, respectivamente, a Ricardo III, Enrique VII y Enrique VIII.*

(b) *A partir de la información anterior, probar, mediante resolución, que Enrique VIII fue rey.*

Solución:

Solución del apartado (a) La formalización del problema es:

1. El primogénito de un rey hereda la corona de dicho rey:
   $(\forall x)(\forall y)[R(y) \wedge P(x, y) \rightarrow H(x, y)]$.

2. Si alguien derrota a un rey entonces hereda su corona:
   $(\forall x(\forall y)[D(x, y) \wedge R(y) \rightarrow H(x, y)]$.

3. Si alguien hereda la corona de un rey entonces se convierte en rey :
   $(\forall x)[(\exists y)[R(y) \wedge H(x, y)] \rightarrow R(x)]$.

4. Enrique VIII era el primogénito de Enrique VII:
   $P(c, b)$.

5. Ricardo III era rey y Enrique VII derrotó a Ricardo III:
   $R(a) \wedge D(b, a)$.

Solución del apartado (b) Resolución:

Para realizar la refutación tenemos que formalizar la negación de la conclusión y obtener las correspondientes formas clausales.

La formalización de la negación de la conclusión es $\neg R(c)$.

Las cláusulas correspondientes a los hechos y a la negación de la conclusión son

1 $\{\neg R(y), \neg P(x, y), H(x, y)\}$
2 $\{\neg D(x, y), \neg R(y), H(x, y)\}$
3 $\{\neg R(y), \neg H(x, y), R(x)\}$
4 $\{P(c, b)\}$
5 $\{R(a)\}$
6 $\{D(b, a)\}$
7 $\{\neg R(c)\}$

Una refutación es

1	$\{\neg R(y), \neg P(x,y), H(x,y)\}$	
2	$\{\neg D(x,y), \neg R(y), H(x,y)\}$	
3	$\{\neg R(y), \neg H(x,y), R(x)\}$	
4	$\{P(c,b)\}$	
5	$\{R(a)\}$	
6	$\{D(b,a)\}$	
7	$\{\neg R(c)\}$	
8	$\{\neg R(y), \neg H(c,y)\}$	Resolvente 7.1 y 3.3
9	$\{\neg R(y), \neg P(c,y)\}$	Resolvente 8.2 y 1.3
10	$\{\neg R(b)\}$	Resolvente 9.2 y 4.1
11	$\{\neg R(y), \neg H(b,y)\}$	Resolvente 10.1 y 3.3
12	$\{\neg H(b,a)\}$	Resolvente 11.1 y 5.1
13	$\{\neg D(b,a), \neg R(a)\}$	Resolvente 12.1 y 2.3
14	$\{\neg R(a)\}$	Resolvente 13.1 y 6.1
15	$\square$.	Resolvente 14.1 y 5.1

Examen de Diciembre de 2003

Ejercicio 24 *Sean F y G las siguientes fórmulas:*

$F : (p \rightarrow q) \wedge ((r \rightarrow \neg t) \wedge (q \rightarrow r))$
$G : \neg(\neg t \leftrightarrow (\neg t \wedge p)) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg t)$

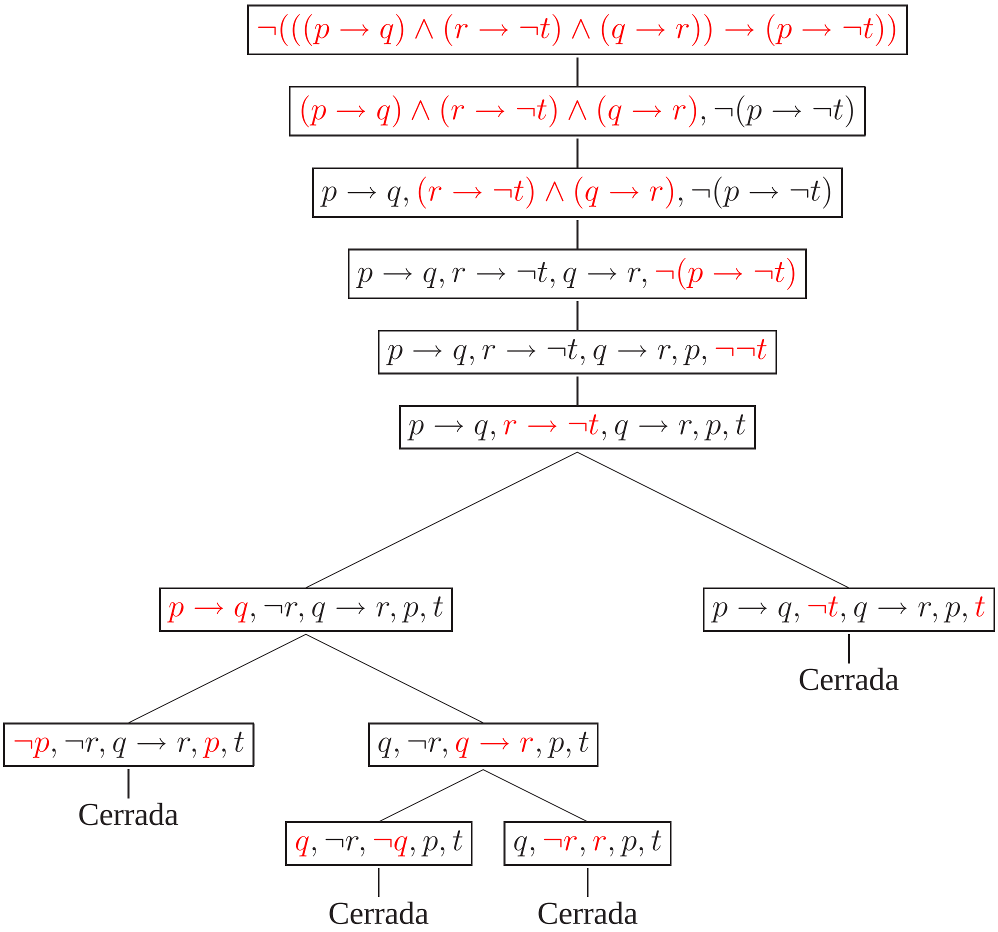
1. *Pruébese mediante un tablero semántico que $F \rightarrow (p \rightarrow \neg t)$ es una tautología.*

2. *Utilizando una forma normal, pruébese que G es satisfactible.*

3. *Pruébese mediante resolución que $\{F, G\} \models r \rightarrow p$.*

Solución:

Solución del apartado 1: El tablero semántico de $\neg(F \rightarrow (p \rightarrow \neg t))$ es



Al ser todas las hojas cerradas, $F \rightarrow (p \rightarrow \neg t)$ es una tautología.

Solución del apartado 2: Demostraremos la satisfacibilidad de G calculando una FND (forma normal disyuntiva) de G:

$$\begin{array}{ll}
\neg(\neg t \leftrightarrow (\neg t \land p)) \to \neg(p \to \neg t) & \\
\equiv \neg((\neg t \to (\neg t \land p)) \land ((\neg t \land p) \to \neg t)) \to \neg(p \to \neg t) & \text{[por (1)]} \\
\equiv \neg\neg((\neg\neg t \lor (\neg t \land p)) \land (\neg(\neg t \land p) \lor \neg t)) \lor \neg(\neg p \lor \neg t) & \text{[por (2)]} \\
\equiv ((t \lor (\neg t \land p)) \land (\neg(\neg t \land p) \lor \neg t)) \lor \neg(\neg p \lor \neg t) & \text{[por (5)]} \\
\equiv ((t \lor (\neg t \land p)) \land ((\neg\neg t \lor \neg p) \lor \neg t)) \lor (\neg\neg p \land \neg\neg t) & \text{[por (3) y (4)]} \\
\equiv ((t \lor (\neg t \land p)) \land ((t \lor \neg p) \lor \neg t)) \lor (p \land t) & \text{[por (5)]} \\
\equiv ((t \lor (\neg t \land p)) \land \mathsf{V}) \lor (p \land t) & \\
\equiv t \lor (\neg t \land p) \lor (p \land t) &
\end{array}$$

Por tanto, G es satisfacible y tiene dos modelos principales: v_1 tal que $v_1(t) = 1$ y v_2 tal que $v_2(t) = 0$ y $v_2(p) = 1$.

Solución del apartado 3: En primer lugar, calculamos las formas clausales:

$$\begin{array}{ll}
(p \to q) \land ((r \to \neg t) \land (q \to r)) & \\
\equiv (\neg p \lor q) \land ((\neg r \lor \neg t) \land (\neg q \lor r)) & \text{[por (2)]} \\
\equiv \{\{\neg p, q\}, \{\neg r, \neg t\}, \{\neg q, r\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\neg(\neg t \leftrightarrow (\neg t \land p)) \to \neg(p \to \neg t) & \\
\equiv (t \lor (\neg t \land p)) \lor (p \land t) & \text{[por el apartado anterior]} \\
\equiv ((t \lor \neg t) \land (t \lor p)) \lor (p \land t) & \text{[por (6)]} \\
\equiv (\mathsf{V} \land (t \lor p)) \lor (p \land t) & \\
\equiv (t \lor p) \lor (p \land t) & \\
\equiv (t \lor p \lor p) \land (t \lor p \lor t) & \text{[por (6)]} \\
\equiv \{\{t, p\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\neg(r \to p) & \\
\equiv \neg(\neg r \lor p) & \text{[por (2)]} \\
\equiv \neg\neg r \land \neg p & \text{[por (4)]} \\
\equiv r \land \neg p & \text{[por (5)]} \\
\equiv \{\{r\}, \{\neg p\}\} &
\end{array}$$

Una resolución de las cláusulas obtenidas es

$$\begin{array}{lll}
1 & \{\neg p, q\} & \\
2 & \{\neg r, \neg t\} & \\
3 & \{\neg q, r\}\} & \\
4 & \{t, p\} & \\
5 & \{r\} & \\
6 & \{\neg p\} & \\
7 & \{\neg t\} & \text{Resolvente de } 2 \text{ y } 5 \\
8 & \{p\} & \text{Resolvente de } 7 \text{ y } 4 \\
9 & \square & \text{Resolvente de } 8 \text{ y } 6
\end{array}$$

Ejercicio 25 *Consideremos el lenguaje de primer orden* $L = \{a, f, P, Q, R\}$ *y el conjunto de fórmulas de* L

$$\begin{array}{rl} S = \{ & (\forall x)[Q(x) \to R(x)], \\ & (\forall x)(\forall y)[P(x,y) \to P(y,x)], \\ & (\forall x)\neg P(x,x), \\ & (\forall x)[P(f(x),x) \to Q(f(x))], \\ & (\forall x)[R(x) \leftrightarrow P(x,f(x))], \\ & Q(f(a))\} \end{array}$$

1. *Defínase razonadamente un modelo* $\mathcal{I}$ *de* S *cuyo universo sea* $U = \{1,2,3,4,5\}$.
2. *Pruébese utilizando un modelo de Herbrand que* $S \not\models (\forall x)[R(x) \to Q(x)]$.
3. *Pruébese mediante resolución que* $S \models (\forall x)[R(x) \to R(f(x))]$.

Solución:

Solución del apartado 1: Tenemos que encontrar una estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ de L, con $U = \{1,2,3,4,5\}$, que sea modelo de las 6 fórmulas de S:

$F_1 : (\forall x)[Q(x) \to R(x)],$
$F_2 : (\forall x)(\forall y)[P(x,y) \to P(y,x)],$
$F_3 : (\forall x)\neg P(x,x),$
$F_4 : (\forall x)[P(f(x),x) \to Q(f(x))],$
$F_5 : (\forall x)[R(x) \leftrightarrow P(x,f(x))],$
$F_6 : Q(f(a))$

Calculamos las consecuencias básicas de las fórmulas anteriores con sus argumentos limitados a los 5 primeros elementos del universo de Herbrand de L; es decir,
a,$f(a)$,$f(f(a))$,$f(f(f(a)))$,$f(f(f(f(a))))$ y $f(f(f(f(f(a)))))$

$F_7 :\ R(f(a))$ [de F_6 y F_1]
$F_8 :\ P(f(a), f(f(a)))$ [de F_7 y F_5]
$F_9 :\ P(f(f(a)), f(a))$ [de F_8 y F_2]
$F_{10} :\ Q(f(f(a)))$ [de F_9 y F_4]
$F_{11} :\ R(f(f(a)))$ [de F_{10} y F_1]
$F_{12} :\ P(f(f(a)), f(f(f(a))))$ [de F_{11} y F_5]
$F_{13} :\ P(f(f(f(a))), f(f(a)))$ [de F_{12} y F_2]
$F_{14} :\ Q(f(f(f(a))))$ [de F_{13} y F_4]
$F_{15} :\ R(f(f(f(a))))$ [de F_{14} y F_1]
$F_{16} :\ P(f(f(f(a))), f(f(f(f(a)))))$ [de F_{15} y F_5]
$F_{17} :\ P(f(f(f(f(a)))), f(f(f(a))))$ [de F_{16} y F_2]
$F_{18} :\ Q(f(f(f(f(a)))))$ [de F_{17} y F_4]
$F_{19} :\ R(f(f(f(f(a)))))$ [de F_{18} y F_1]
$F_{20} :\ P(f(f(f(f(a)))), f(f(f(f(f(a))))))$ [de F_{19} y F_5]
$F_{21} :\ P(f(f(f(f(f(a))))), f(f(f(f(a)))))$ [de F_{20} y F_2]
$F_{22} :\ Q(f(f(f(f(f(a))))))$ [de F_{21} y F_4]
$F_{23} :\ R(f(f(f(f(f(a))))))$ [de F_{22} y F_1]

Las consecuencias anteriores, ordenadas, son:

$P(f(a), f(f(a)))$
$P(f(f(a)), f(a))$
$P(f(f(a)), f(f(f(a))))$
$P(f(f(f(a))), f(f(a)))$
$P(f(f(f(a))), f(f(f(f(a)))))$
$P(f(f(f(f(a)))), f(f(f(a))))$
$P(f(f(f(f(a)))), f(f(f(f(f(a))))))$
$P(f(f(f(f(f(a))))), f(f(f(f(a)))))$

$Q(f(a))$
$Q(f(f(a)))$
$Q(f(f(f(a))))$
$Q(f(f(f(f(a)))))$
$Q(f(f(f(f(f(a))))))$

$R(f(a))$
$R(f(f(a)))$
$R(f(f(f(a))))$
$R(f(f(f(f(a)))))$
$R(f(f(f(f(f(a))))))$

Un modelo de las consecuencias es

$a^I = 1,$
$f^I = \{(1,2),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1)\},$
$P^I = \{(1,2),(2,1)\},$
$Q^I = \{1,2\},$
$R^I = \{1,2\}$

que puede comprobase fácilmente que es un modelo de S.

Solución del apartado 2: El universo de Herbrand de L es UH $= \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$. Un modelo de Herbrand de S en el que no se cumple la fórmula $(\forall x)[R(x) \to Q(x)]$ es

$$I = \{P(x, f(x)), P(f(x), x), Q(f(x)), R(x) : x \in \text{UH}\}.$$

Vamos a comprobarlo,

- $I \models (\forall x)[Q(x) \to R(x)]$, ya que R se cumple para todos los elementos de UH.
- $I \models (\forall x)(\forall y)[P(x,y) \to P(y,x)]$, ya que en P es simétrica en I.
- $I \models (\forall x)\neg P(x,x)$, ya que todas las ocurrencias de P en I tiene sus dos argumentos distintos.
- $I \models (\forall x)[P(f(x), x) \to Q(f(x))]$, ya que para todo $x \in$ UH, $Q(f(x)) \in I$.

- $I \models (\forall x)[R(x) \leftrightarrow P(x,f(x))$, ya que $R(x)$ y $P(x,f(x))$ se verifican en I para todo $x \in$ UH.
- $I \models Q(f(a))$, ya que $Q(f(a)) \in$ UH.
- $I \not\models (\forall x)[R(x) \to Q(x)]$, ya que $R(a) \in$ UH pero $Q(a) \not\in$ UH.

Solución del apartado 3: En primer lugar, calculamos las formas clausales de las fórmulas de S y de la negación de $(\forall x)[R(x) \to R(f(x))]$:

$$\begin{array}{lll}
F_1: & (\forall x)[Q(x) \to R(x)] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg Q(x) \vee R(x)] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \{\{\neg Q(x), R(x)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
F_2: & (\forall x)(\forall y)[P(x,y) \to P(y,x)] & \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x,y) \vee P(y,x)] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x,y), P(y,x)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
F_3: & (\forall x)\neg P(x,x) & \\
\equiv & \{\{\neg P(x,x)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
F_4: & (\forall x)[P(f(x),x) \to Q(f(x))] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg P(f(x),x) \vee Q(f(x))] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(f(x),x), Q(f(x))\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
F_5: & (\forall x)[R(x) \leftrightarrow P(x,f(x))] & \\
\equiv & (\forall x)[(R(x) \to P(x,f(x))) \wedge (P(x,f(x)) \to R(x))] & \text{[por (1)]} \\
\equiv & (\forall x)[(\neg R(x) \vee P(x,f(x))) \wedge (\neg P(x,f(x)) \vee R(x))] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \{\{\neg R(x), P(x,f(x))\}, \{\neg P(x,f(x)), R(x)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
F_6: & Q(f(a)) & \\
\equiv & \{\{Q(f(a))\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & \neg(\forall x)[R(x) \to R(f(x))] & \\
\equiv & \neg(\forall x)[\neg R(x) \vee R(f(x))] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\exists x)\neg(\neg R(x) \vee R(f(x))) & \text{[por (8)]} \\
\equiv & (\exists x)(\neg\neg R(x) \wedge \neg R(f(x))) & \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\exists x)(R(x) \wedge \neg R(f(x))) & \text{[por (7)]} \\
\equiv_{sat} & R(b) \wedge \neg R(f(b)) & [b \text{ constante de Skolem}] \\
\equiv_{sat} & \{\{R(b)\}, \{\neg R(f(b))\}\} &
\end{array}$$

Una resolución de las cláusulas obtenidas es

1	$\{\neg Q(x), R(x)\}$	
2	$\{\neg P(x,y), P(y,x)\}$	
3	$\{\neg P(x,x)\}$	
4	$\{\neg P(f(x),x), Q(f(x))\}$	
5	$\{\neg R(x), P(x,f(x))\}$	
6	$\{\neg P(x,f(x)), R(x)\}$	
7	$\{R(b)\}$	
8	$\{\neg R(f(b))\}$	
9	$\{\neg Q(f(b))\}$	Resolvente de 8 y 1
10	$\{P(b,f(b))\}$	Resolvente de 7 y 5
11	$\{P(f(b),b)\}$	Resolvente de 10 y 2
12	$\{Q(f(b))\}$	Resolvente de 11 y 4
13	$\square$	Resolvente de 12 y 9

Ejercicio 26 *Hállense formas prenexa, de Skolem y clausal de la siguiente fórmula:*

$$(\forall x)[(\exists z)P(z) \to Q(x)] \to ((\forall z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u))$$

Solución:

1.– Forma prenexa:

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)[(\exists z)P(z) \to Q(x)] \to ((\forall z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u)) & \\
\equiv & (\forall x)[(\exists z)P(z) \to Q(x)] \to ((\forall v)A(y,v) \to (\exists u)B(y,u)) & \text{[por rectificación]} \\
\equiv & \neg(\forall x)[\neg(\exists z)P(z) \lor Q(x)] \lor (\neg(\forall v)A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\exists x)[\neg(\neg(\exists z)P(z) \lor Q(x))] \lor ((\exists v)\neg A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (8)]} \\
\equiv & (\exists x)[\neg\neg(\exists z)P(z) \land \neg Q(x)] \lor ((\exists v)\neg A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\exists x)[(\exists z)P(z) \land \neg Q(x)] \lor ((\exists v)\neg A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists z)(\exists v)(\exists u)[(P(z) \land \neg Q(x)) \lor (\neg A(y,v) \lor B(y,u))] & \text{[por (11)–(18)]}
\end{array}$$

2.– Forma de Skolem:

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)[(\exists z)P(z) \to Q(x)] \to ((\forall z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u)) & \\
\equiv_{sat} & (\exists y)[(\forall x)[(\exists z)P(z) \to Q(x)] \to ((\forall z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u))] & \text{[cierre existencial]} \\
\equiv & (\exists y)(\exists x)(\exists z)(\exists v)(\exists u)[(P(z) \land \neg Q(x)) \lor (\neg A(y,v) \lor B(y,u))] & \text{[por anterior]} \\
\equiv & (P(c) \land \neg Q(b)) \lor (\neg A(a,d) \lor B(a,e)) & \text{[constantes de Skolem]}
\end{array}$$

3.– Forma clausal

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)[(\exists z)P(z) \to Q(x)] \to ((\forall z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u)) & \\
\equiv_{sat} & (P(c) \land \neg Q(b)) \lor (\neg A(a,d) \lor B(a,e)) & \text{[anterior]} \\
\equiv & (P(c) \lor (\neg A(a,d) \lor B(a,e))) \land (\neg Q(b) \lor (\neg A(a,d) \lor B(a,e))) & \text{[por (20)]} \\
\equiv & \{\{(P(c), \neg A(a,d), B(a,e)\}, \{\neg Q(b), \neg A(a,d), B(a,e)\}\} &
\end{array}$$

Curso 2003–04

Examen de Junio de 2004

Ejercicio 27 *Probar* $(E \lor F) \rightarrow G \models (E \rightarrow G) \land (F \rightarrow G)$

(a) Mediante deducción natural.

(b) Por resolución.

Solución:

Solución del apartado (a): Demostración por deducción natural:

1	$(E \lor F) \rightarrow G$	premisa
2	E	supuesto
3	$E \lor F$	I$\lor$ 2
4	G	E$\rightarrow$ $1, 3$
5	$E \rightarrow G$	I$\rightarrow$ $2-4$
6	F	supuesto
7	$E \lor F$	I$\lor$ 6
8	G	E$\rightarrow$ $1, 7$
9	$F \rightarrow G$	I$\rightarrow$ $6-8$
10	$(E \rightarrow G) \land (F \rightarrow G)$	I$\land$ $5, 9$

Solución del apartado (b): Demostración por resolución: En primer lugar se transforma la premisa a forma clausal:

$$\begin{array}{lll}
 & (E \lor F) \rightarrow G & \\
\equiv & \neg(E \lor F) \lor G & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg E \land \neg F) \lor G & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\neg E \lor G) \land (\neg F \lor G) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \{\{\neg E, G\}, \{\neg F, G\}\} &
\end{array}$$

A continuación, se transforma la negación de la conclusión a forma clausal:

$$\begin{array}{lll}
 & \neg((E \rightarrow G) \land (F \rightarrow G)) & \\
\equiv & \neg((\neg E \lor G) \land (\neg F \lor G)) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \neg(\neg E \lor G) \lor \neg(\neg F \lor G) & \text{[por (3)]} \\
\equiv & (\neg\neg E \land \neg G) \lor (\neg\neg F \land \neg G) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (E \land \neg G) \lor (F \land \neg G) & \text{[por (5)]} \\
\equiv & ((E \land \neg G) \lor F) \land ((E \land \neg G) \lor \neg G) & \text{[por (6)]} \\
\equiv & ((E \lor F) \land (\neg G \lor F)) \land ((E \lor \neg G) \land (\neg G \lor \neg G)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \{\{E, F\}, \{\neg G, F\}, \{E, \neg G\}, \{\neg G\}\} &
\end{array}$$

Finalmente, se construye una refutación de las cláusulas obtenidas:

1	$\{\neg E, G\}$	
2	$\{\neg F, G\}$	
3	$\{E, F\}$	
4	$\{\neg G, F\}$	
5	$\{E, \neg G\}$	
6	$\{\neg G\}$	
7	$\{\neg E\}$	Resolvente de 1 y 6
8	$\{\neg F\}$	Resolvente de 2 y 6
9	$\{F\}$	Resolvente de 3 y 7
10	$\square$	Resolvente de 8 y 9

Ejercicio 28 *El ejercicio tiene tres apartados.*

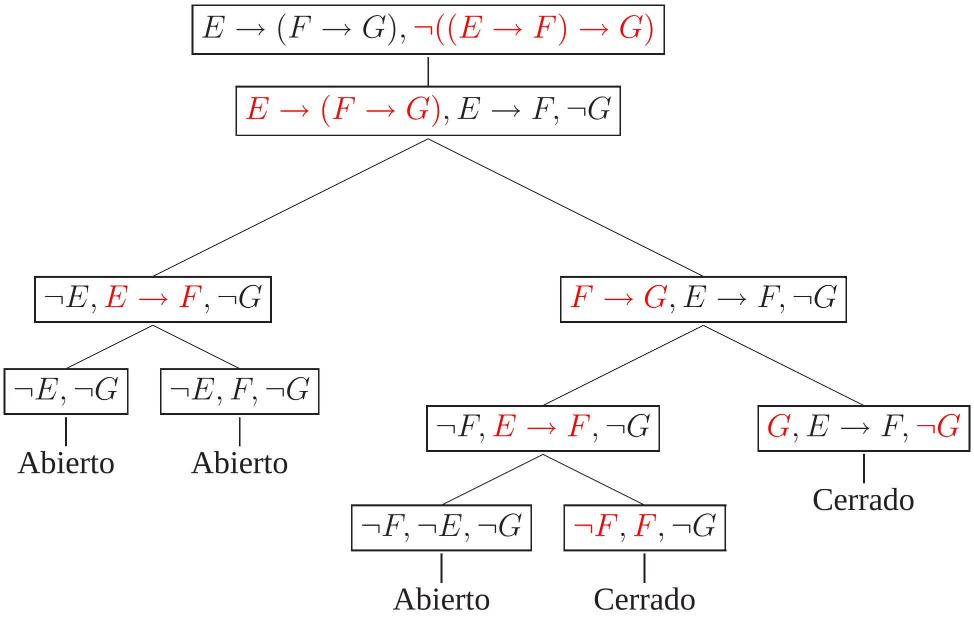
(a) Pruébese que $E \to (F \to G) \not\models (E \to F) \to G$ *mediante tableros semánticos.*

(b) Descríbanse todos los modelos de $E \to (F \to G)$ *que no son modelos de* $(E \to F) \to G$.

(c) La fórmula $E \to (F \to G) \to (E \to F) \to G$*, ¿es una tautología? Razónese la respuesta.*

Solución:

Solución del apartado (a): Demostración por tableros semánticos:



Solución del apartado (b): Los modelos de $E \to (F \to G)$ que no son modelos de la fórmula $(E \to F) \to G$ son los modelos de las hojas abiertas del árbol anterior; es decir, cualquier interpretación I tal que $I(E) = 0$ y $I(G) = 0$.

Solución del apartado (c): La fórmula $E \rightarrow (F \rightarrow G) \rightarrow (E \rightarrow F) \rightarrow G$ no es una tautología, porque si lo fuera se tendría que $E \rightarrow (F \rightarrow G) \models (E \rightarrow F) \rightarrow G$ en contradicción con el apartado (a).

Ejercicio 29 *Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado, Q, (de aridad 2) y un símbolo de función, f, (de aridad 1). Se considera la estructura $\mathcal{I}$ dada por: Universo: $\{a, b\}$, $Q^I = \{(a, b), (b, a)\}$, $f^I(a) = a$ y $f^I(b) = a$. Decidir cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen en la estructura:*

1. $(\forall x)[Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)]$
2. $(\exists x)[Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)]$

Solución:

Solución para la primera fórmula:

$$\mathcal{I}((\forall x)[Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)]) = \mathsf{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)) = \mathsf{V} \text{ y} \\ \mathcal{I}_{[x/b]}(Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)) = \mathsf{V} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)) &= Q^I(f^I(a), a) \rightarrow Q^I(a, a) = \\ &= Q^I(a, a) \rightarrow Q^I(a, a) = \\ &= \mathsf{F} \rightarrow \mathsf{F} = \\ &= \mathsf{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{[x/b]}(Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)) &= Q^I(f^I(b), b) \rightarrow Q^I(b, b) = \\ &= Q^I(a, b) \rightarrow Q^I(b, b) = \\ &= \mathsf{V} \rightarrow \mathsf{F} = \\ &= \mathsf{F} \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}((\forall x)[Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)]) = \mathsf{F}$

Solución para la segunda fórmula:

$$\mathcal{I}((\exists x)[Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)]) = \mathsf{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)) = \mathsf{V} \text{ ó} \\ \mathcal{I}_{[x/b]}(Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)) = \mathsf{V} \end{array}$$

$$\mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)) = \mathsf{V}$$

Por tanto, $\mathcal{I}((\exists x)[Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)]) = \mathsf{V}$

Ejercicio 30 *Sabemos que*

1. *Cualquiera que estudie lo suficiente aprueba todas las asignaturas.*
2. *Cuando alguien que celebra su cumpleaños en julio ha aprobado todas las asignaturas, se le obsequia con un regalo.*

3. *Quien recibe un regalo sin estudiar lo suficiente, nunca es obsequiado con un móvil.*
4. *Pablo es un alumno que, a pesar de no estudiar lo suficiente, recibió un móvil como regalo.*

Se pide:

(a) *Formalizar los conocimientos anteriores teniendo en cuenta que los predicados del texto se representan así:* $C(x)$ = *"*x *celebra su cumpleaños en julio";* $A(x)$ = *"*x *ha aprobado todas las asignaturas";* $S(x)$ = *"*x *estudia lo suficiente";* $R(x,y)$ = *"*x *recibe el regalo* y*". Y las constantes* a *y* b *representan respectivamente a Pablo y al móvil.*

(b) *Obtener el conjunto de cláusulas de las fórmulas anteriores y probar que es inconsistente dando un subconjunto de su extensión de Herbrand que lo sea.*

(c) *Probar, mediante resolución, que el enunciado "Si Pablo recibe un móvil como regalo, entonces ha aprobado todas las asignaturas" es consecuencia lógica de los enunciados 1 y 3.*

Solución:

Solución del apartado (a): Formalización del discurso:

$$\begin{array}{ll}
F_1: & (\forall x)[S(x) \to A(x)] \\
F_2: & (\forall x)[C(x) \land A(x) \to (\exists y)R(x,y)] \\
F_3: & (\forall x)[(\exists y)R(x,y) \land \neg S(x) \to \neg R(x,b)] \\
F_4: & \neg S(a) \land R(a,b)
\end{array}$$

Solución del apartado (b.1): Cálculo del conjunto de cláusulas de las fórmulas anteriores:

$$\begin{array}{lll}
F_1: & (\forall x)[S(x) \to A(x)] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg S(x) \lor A(x)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & \{\{\neg S(x), A(x)\}\} & \text{[por (4)]}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
F_2: & (\forall x)[C(x) \land A(x) \to (\exists y)R(x,y)] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg(C(x) \land A(x)) \lor (\exists y)R(x,y)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)[(\neg C(x) \lor \neg A(x)) \lor (\exists y)R(x,y)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[\neg C(x) \lor \neg A(x) \lor R(x,y)] & \text{[por (18)]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[\neg C(x) \lor \neg A(x) \lor R(x,f(x))] & [f \text{ función de Skolem}] \\
\equiv & \{\{\neg C(x), \neg A(x), R(x,f(x))\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
F_3: & (\forall x)[(\exists y)R(x,y) \land \neg S(x) \to \neg R(x,b)] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg((\exists y)R(x,y) \land \neg S(x)) \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)[(\neg(\exists y)R(x,y) \lor \neg\neg S(x)) \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg(\exists y)R(x,y) \lor S(x)) \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (\forall x)[((\forall y)\neg R(x,y) \lor S(x)) \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)[(\forall y)[\neg R(x,y) \lor S(x)] \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (12)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg R(x,y) \lor S(x) \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (12)]} \\
\equiv & \{\{\neg R(x,y), S(x), \neg R(x,b)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll} F_4: & \neg S(a) \land R(a,b) \\ \equiv & \{\{\neg S(a)\},\{R(a,b)\}\} \end{array}$$

Solución del apartado (b.2): Demostración de la inconsistencia del conjunto de cláusulas:

1 $\{\neg S(x), A(x)\}$
2 $\{\neg C(x), \neg A(x), R(x, f(x))\}$
3 $\{\neg R(x,y), S(x), \neg R(x,b)\}$
4 $\{\neg S(a)\}$
5 $\{R(a,b)\}$
6 $\{S(a)\}$ Resolvente de 3 y 5 con $\sigma_1 = [x/a, y/b]$
7 $\Box$ Resolvente de 6 y 4 con $\sigma_2 = \epsilon$

Por tanto, un subconjunto de su extensión de Herbrand inconsistente es el formado por

$$C_3\sigma_1 = \{\neg R(a,b), S(a)\}$$
$$C_5\sigma_1 = \{R(a,b)\}$$
$$C_4\sigma_2 = \{\neg S(a)\}$$

Solución del apartado (c): La formalización de la conclusión es

$$R(a,b) \to A(a)$$

La forma clausal de su negación es

$$\{\{R(a,b)\},\{\neg A(a)\}\}$$

La demostración por resolución es

1 $\{\neg S(x), A(x)\}$
2 $\{\neg R(x,y), S(x), \neg R(x,b)\}$
3 $\{R(a,b)\}$
4 $\{\neg A(a)\}$
5 $\{S(a)\}$ Resolvente de 3 y 5 con $\sigma = [x/a, y/b]$
6 $\{A(a)\}$ Resolvente de 5 y 1 con $\sigma = [x/a]$
6 $\Box$ Resolvente de 6 y 4 con $\sigma_2 = \epsilon$

Examen de Septiembre de 2004

Ejercicio 31 *En un texto de Lewis Carroll, el tío Jorge y el tío Jaime discuten acerca de la barbería del pueblo, atendida por tres barberos: Alberto, Benito y Carlos. Los dos tíos aceptan las siguientes premisas:*

1. *Si Carlos no está en la barbería, entonces ocurrirá que si tampoco está Alberto, Benito tendrá que estar para atender el establecimiento.*
2. *Si Alberto no está, tampoco estará Benito.*

El tío Jorge concluye de todo esto que Carlos no puede estar ausente, mientras que el tío Jaime afirma que sólo puede concluirse que Carlos y Alberto no pueden estar ausentes a la vez. Decidir con el método de los tableros semánticos cuál de los dos tiene razón.

Solución:

En la representación del problema usaremos los siguientes símbolos proposicionales

a representa que Alberto está en la barbería
b representa que Benito está en la barbería
c representa que Carlos está en la barbería

Luego,

$\neg a$ representa que Alberto está ausente
$\neg b$ representa que Benito está ausente
$\neg c$ representa que Carlos está ausente

Con dicha notación, la representación de la primera premisa es

$$\neg c \to (\neg a \to b)$$

y la de la segunda es

$$\neg a \to \neg b$$

La representación de la conclusión del tío Jorge es $\neg\neg c$. Por tanto, el tío Jorge tiene razón si

$$\{\neg c \to (\neg a \to b), \neg a \to \neg b\} \models \neg\neg c$$

o, equivalentemente, si $\{\neg c \to (\neg a \to b), \neg a \to \neg b, \neg\neg\neg c\}$ es inconsistente. Puesto que el tablero del tío Jorge (figura 4) no es cerrado, el conjunto $\{\neg c \to (\neg a \to b), \neg a \to \neg b, \neg c\}$ es consistente (por ejemplo, es posible que Alberto esté en la barbería y Carlos no esté). Por tanto, el tío Jorge no tiene razón.

La representación de la conclusión del tío Jaime es $\neg(\neg c \wedge \neg a)$. Por tanto, el tío Jaime tiene razón si

$$\{\neg c \to (\neg a \to b), \neg a \to \neg b\} \models \neg(\neg c \wedge \neg a)$$

o, equivalentemente, si $\{\neg c \to (\neg a \to b), \neg a \to \neg b, \neg\neg(\neg c \wedge \neg a)\}$ es inconsistente. Puesto que el tablero del tío Jaime (figura 5) es cerrado, el conjunto $\{\neg c \to (\neg a \to b), \neg a \to \neg b, \neg\neg(\neg c \wedge \neg a)\}$ es inconsistente. Por tanto, el tío Jaime tiene razón.

Ejercicio 32 *Probar que la fórmula* $(E \to (F \wedge G)) \to (E \to F) \vee (E \to G)$ *es una tautología*

(a) *Mediante deducción natural.*

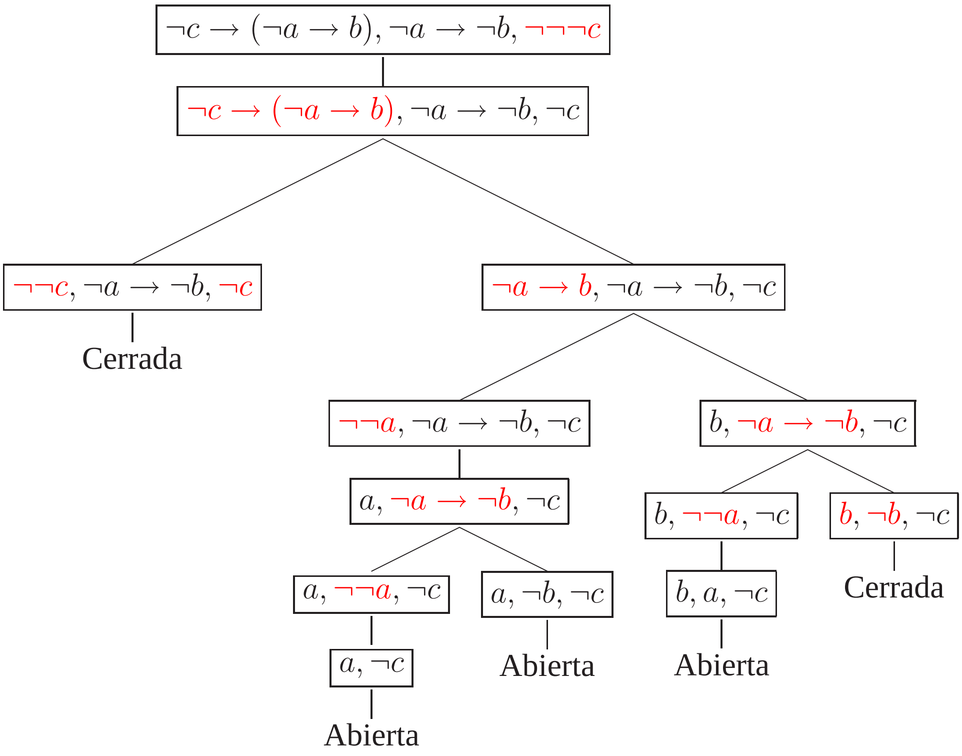


Figura 4: Tablero del tío Jorge

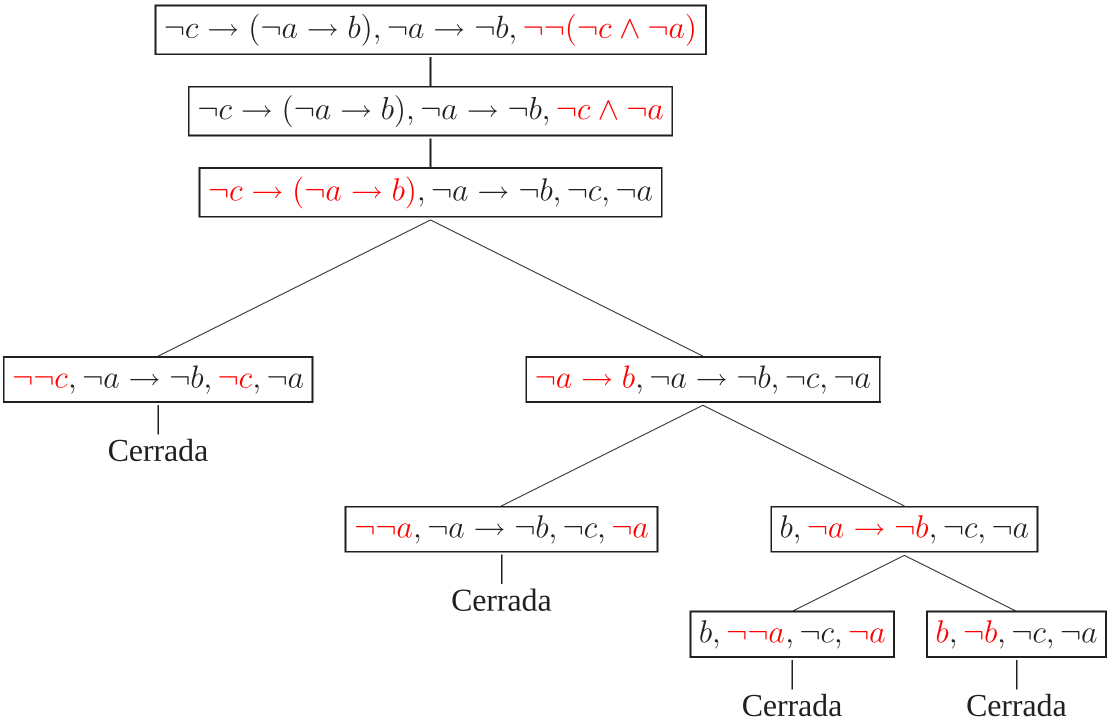


Figura 5: Tablero del tío Jaime

(b) Usando formas normales.

(c) Por tableros semánticos.

Solución:

Solución del apartado (a): Deducción natural:

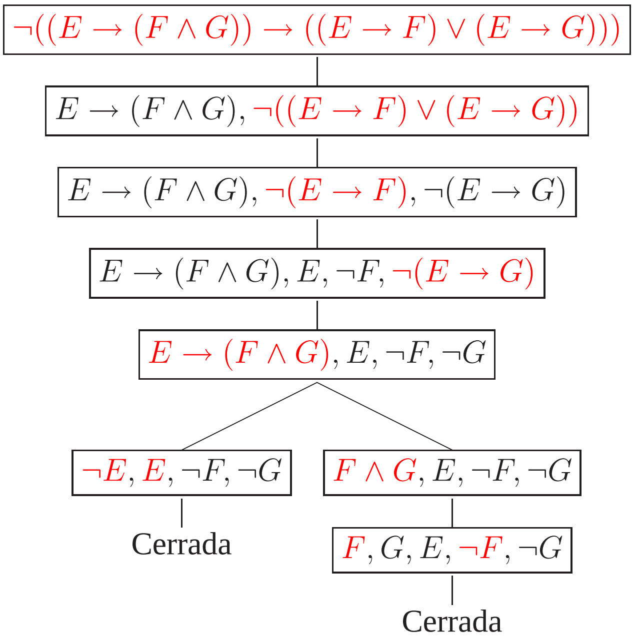
1	$(E \rightarrow (F \wedge G)$	supuesto
2	E	supuesto
3	$F \wedge G$	E$\rightarrow 1,2$
4	F	E$\wedge$ 3
5	$E \rightarrow F$	I$\rightarrow 2-4$
6	$(E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G)$	I$\vee$ 5
7	$(E \rightarrow (F \wedge G) \rightarrow (E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G)$	I$\rightarrow 1-6$

Solución del apartado (b): Forma normal conjuntiva:

$$\begin{aligned}
& (E \rightarrow (F \wedge G)) \rightarrow (E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G) & \\
\equiv\ & \neg(\neg E \vee (F \wedge G)) \vee (\neg E \vee F) \vee (\neg E \vee G) & \text{[por (2)]} \\
\equiv\ & (\neg\neg E \wedge \neg(F \wedge G)) \vee (\neg E \vee F) \vee (\neg E \vee G) & \text{[por (4)]} \\
\equiv\ & (E \wedge (\neg F \vee \neg G)) \vee (\neg E \vee F) \vee (\neg E \vee G) & \text{[por (3) y (5)]} \\
\equiv\ & (E \wedge (\neg F \vee \neg G)) \vee (\neg E \vee F \vee G) & \\
\equiv\ & (E \vee (\neg E \vee F \vee G)) \wedge ((\neg F \vee \neg G) \vee (\neg E \vee F \vee G)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv\ & (E \vee \neg E \vee F \vee G) \wedge (\neg F \vee \neg G \vee \neg E \vee F \vee G) &
\end{aligned}$$

Puesto que en cada una de las dos conjunciones hay un par de literales complementarios, la fórmula es una tautología.

Solución del apartado (c): Tablero semántico



Ejercicio 33 *Probar la inconsistencia del conjunto de fórmulas:*

$$U = \{\neg E \to F \lor G,\ E \to F \lor G,\ G \to F,\ F \to E,\ E \to \neg F\}$$

(a) Demostrando que no tiene modelos.

(b) Por resolución

Solución:

Solución del apartado (a): Cálculo de modelos de U

E	F	G	$\neg E \to F \lor G$	$E \to F \lor G$	$G \to F$	$F \to E$	$E \to \neg F$
1	1	1					0
1	1	0					0
1	0	1			0		
1	0	0		0			
0	1	1				0	
0	1	0				0	
0	0	1			0		
0	0	0	0				

Puesto que cada una de las 8 interpretaciones falsifica alguna fórmula de U, el conjunto U no tiene modelos.

Solución del apartado (b): Las formas clausales de las fórmulas de U son

$$\begin{array}{lll} & \neg E \to F \lor G & \\ \equiv & \neg\neg E \lor F \lor G & \text{[por (2)]} \\ \equiv & E \lor F \lor G & \text{[por (5)]} \\ \equiv & \{\{E, F, G\}\} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & E \rightarrow F \lor G \\ \equiv & \neg E \lor F \lor G \qquad \text{[por (2)]} \\ \equiv & \{\{\neg E, F, G\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & G \rightarrow F \\ \equiv & \neg G \lor F \qquad \text{[por (2)]} \\ \equiv & \{\{\neg G, F\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & F \rightarrow E \\ \equiv & \neg F \lor E \qquad \text{[por (2)]} \\ \equiv & \{\{\neg F, E\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & E \rightarrow \neg F \\ \equiv & \neg E \lor \neg F \qquad \text{[por (2)]} \\ \equiv & \{\{\neg E, \neg F\}\} \end{array}$$

Una refutación de U por resolución es

1	$\{E, F, G\}$	
2	$\{\neg E, F, G\}$	
3	$\{\neg G, F\}$	
4	$\{\neg F, E\}$	
5	$\{\neg E, \neg F\}$	
6	$\{\neg F\}$	Resolvente de 4 y 5
7	$\{\neg G\}$	Resolvente de 6 y 3
8	$\{E, G\}$	Resolvente de 1 y 6
9	$\{E\}$	Resolvente de 8 y 7
10	$\{F, G\}$	Resolvente de 2 y 10
11	$\{G\}$	Resolvente de 10 y 6
12	$\square$	Resolvente de 11 y 7

Ejercicio 34 *Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado P de aridad 2.*

(a) Probar que las fórmulas $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ y $(\exists x)(\forall y)P(x, y)$ no son equivalentes dando una estructura que sea modelo de la primera pero no de la segunda.

(b) En la estructura M cuyo universo es $|M| = \{a, b, c\}$ y $P^M = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}$, ¿cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen y cuáles no?

1. $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x, y)$
2. $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$
3. $\neg[(\forall x)(\exists y)P(x, y) \land (\exists x)(\forall y)P(x, y)]$

Solución:

Solución del apartado (a): Basta encontrar un modelo de Herbrand de

$$S = \{(\forall x)(\exists y)P(x, y), \neg(\exists x)(\forall y)P(x, y)\}$$

Para ello calculamos una forma clausal del conjunto anterior

$$\begin{array}{ll}
 & (\forall x)(\exists y)P(x,y) \\
\equiv_{sat} & (\forall x)P(x,f(x)) \quad [f \text{ función de Skolem}] \\
\equiv & \{\{P(x,f(x)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)(\forall y)P(x,y) \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)\neg P(x,y) \\
\equiv_{sat} & (\forall x)\neg P(x,g(x)) \quad [g \text{ función de Skolem}] \\
\equiv & \{\{\neg P(x,g(x)\}\}
\end{array}$$

Una forma clausal de S es $\{\{P(x,f(x)\},\{\neg P(x,g(x)\}\}$.

El universo de Herbrand de S es UH$(S) = \{a, f(a), f(f(a)), \dots, g(a), g(g(a)), \dots\}$. Un modelo de Herbrand de S es $\mathcal{I} = \{P(x,f(x)) : x \in \text{UH}(S)\}$.

Solución del apartado (b.1):

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\forall y)P(x,y)) = \\
H_{\to}(\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y)), \mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y)))
\end{array} \tag{1}$$

$$\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \iff \begin{array}{l} \mathcal{M}_{[x/a]}((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ y} \\ \mathcal{M}_{[x/b]}((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ y} \\ \mathcal{M}_{[x/c]}((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \end{array} \tag{2}$$

$$\mathcal{M}_{[x/b]}((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \iff \begin{array}{l} \mathcal{M}_{[x/b,y/a]}(P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ o} \\ \mathcal{M}_{[x/b,y/b]}(P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ o} \\ \mathcal{M}_{[x/b,y/c}(P(x,y)) = \mathsf{V} \end{array} \tag{3}$$

$$\mathcal{M}_{[x/b,y/a]}(P(x,y)) = P^M(b,a) = \mathsf{F} \tag{4}$$

$$\mathcal{M}_{[x/b,y/b]}(P(x,y)) = P^M(b,b) = \mathsf{F} \tag{5}$$

$$\mathcal{M}_{[x/b,y/c]}(P(x,y)) = P^M(b,c) = \mathsf{F} \tag{6}$$

De (3), (4), (5) y (6) se tiene

$$\mathcal{M}_{[x/b]}((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{F} \tag{7}$$

De (7) y (2) se tiene

$$\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y)) = \mathsf{F} \tag{8}$$

De (8) y (1) se tiene

$$\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V}$$

Solución del apartado (b.2):

$$\begin{array}{l}\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)) = \\ H_{\rightarrow}(\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y)), \mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y)))\end{array} \tag{9}$$

$$\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \iff \begin{array}{l}\mathcal{M}_{[x/a]}((\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ o} \\ \mathcal{M}_{[x/b]}((\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ o} \\ \mathcal{M}_{[x/c]}((\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V}\end{array} \tag{10}$$

$$\mathcal{M}_{[x/a]}((\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \iff \begin{array}{l}\mathcal{M}_{[x/a,y/a]}(P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ y} \\ \mathcal{M}_{[x/a,y/b]}(P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ y} \\ \mathcal{M}_{[x/a,y/c]}(P(x,y)) = \mathsf{V}\end{array} \tag{11}$$

$$\mathcal{M}_{[x/a,y/a]}(P(x,y)) = P^M(a,a) = \mathsf{V} \tag{12}$$

$$\mathcal{M}_{[x/a,y/b]}(P(x,y)) = P^M(a,b) = \mathsf{V} \tag{13}$$

$$\mathcal{M}_{[x/a,y/c]}(P(x,y)) = P^M(a,c) = \mathsf{V} \tag{14}$$

De (11), (12), (13) y (14) se tiene

$$\mathcal{M}_{[x/a]}((\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \tag{15}$$

De (10) y (15) se tiene

$$\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \tag{16}$$

De (9), (16) y (8) se tiene

$$\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)) = H_{\rightarrow}(\mathsf{V},\mathsf{F}) = \mathsf{F}$$

Solución del apartado (b.3):

$$\begin{array}{rll} & \mathcal{M}(\neg[(\forall x)(\exists y)P(x,y) \wedge (\exists x)(\forall y)P(x,y)]) & \\ = & H_{\neg}(\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y) \wedge (\exists x)(\forall y)P(x,y))) & \\ = & H_{\neg}(H_{\wedge}(\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y)), \mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y)))) & \\ = & H_{\neg}(H_{\wedge}(\mathsf{F},\mathsf{V})) & \text{[por (8) y (16)]} \\ = & H_{\neg}(\mathsf{F}) & \\ = & \mathsf{V} & \end{array}$$

Ejercicio 35 *Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones se cumplen. Para ello, dar una prueba por resolución y otra por deducción natural de cada una de las válidas y calcular un modelo de Herbrand de las que no lo son.*

1. $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \models (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$
2. $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \models (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

3. $(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \models (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

Solución:

Solución del apartado (1): Para decidir si $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \models (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$, basta comprobar si $S = \{(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x), \neg(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]\}$ es inconsistente. Comprobaremos la inconsistencia de S por resolución. Para ello, comenzamos calculando una forma clausal de S.

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \\ \equiv & (\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y) \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[P(x) \vee Q(y)] \\ \equiv & \{\{P(x), Q(y)\}\} \\ & \neg(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \\ \equiv & (\exists x)\neg(P(x) \vee Q(x)) \\ \equiv & (\exists x)[\neg P(x) \wedge \neg Q(x)] \\ \equiv_{sat} & \neg P(a) \wedge \neg Q(a) \\ \equiv & \{\{\neg P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\} \end{array}$$

Una demostración por resolución de S es

1	$\{P(x), Q(y)\}$	
2	$\{\neg P(a)\}$	
3	$\{\neg Q(a)\}$	
4	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 2
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4

La demostración por deducción natural se muestra en la figura 6 (79).

Solución del apartado (2): Para decidir si $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \models (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$ basta comprobar si $S = \{(\forall x)[P(x) \vee Q(x)], \neg((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))\}$ es inconsistente. Comprobaremos la inconsistencia de S por resolución. Para ello, comenzamos calculando una forma clausal de S.

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \\ \equiv & \{\{P(x), Q(x)\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & \neg((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)) & \\ \equiv & \neg((\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y)) & \\ \equiv & \neg(\forall x)P(x) \wedge \neg(\forall y)Q(y) & \\ \equiv & (\exists x)\neg P(x) \wedge (\exists y)\neg Q(y) & \\ \equiv & (\exists x)(\exists y)[\neg P(x) \wedge \neg Q(y)] & \\ \equiv_{sat} & \neg P(a) \wedge \neg Q(b) & [a \text{ y } b \text{ constantes de Skolem}] \\ \equiv & \{\{\neg P(a)\}, \{\neg Q(b)\}\} & \end{array}$$

Las cláusulas de la forma clausal de S son:

1 $\{P(x), Q(x)\}$
2 $\{\neg P(a)\}$
3 $\{\neg Q(b)\}$

1	$(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$	premisa
2	$\forall x P(x)$	supuesto
3	actual i	supuesto
4	$P(i)$	E$\forall$ $2, 3$
5	$P(i) \lor Q(i)$	I$\lor$ 4
6	$(\forall x)[P(x) \lor Q(x)]$	I$\forall$ $3-5$
7	$\forall x Q(x)$	supuesto
8	actual j	supuesto
9	$P(j)$	E$\forall$ $7, 8$
10	$P(j) \lor Q(j)$	I$\lor$ 9
11	$(\forall x)[P(x) \lor Q(x)]$	I$\forall$ $7-10$
12	$(\forall x)[P(x) \lor Q(x)]$	E$\lor$ $1, 2-6, 7-11$

Figura 6: Deducción natural del ejercicio 5.1

Veamos el proceso de saturación por resolución:
Al resolver 2 con 2 no se obtiene resolvente.
Al resolver 3 con 2 y 3 no se obtiene resolvente.
Al resolver 1 con 2, 3 y 1 se obtiene
4 $\{Q(a)\}$ (resolvente de 1 y 2)
5 $\{P(b)\}$ (resolvente de 1 y 3)
Al resolver 4 con 2, 3, 1 y 4 no se obtiene resolvente.
Al resolver 5 con 2, 3, 1, 4 y 5 no se obtiene resolvente.

Al no obtenerse la cláusula vacía, se tiene que S es consistente y, por tanto,
$(\forall x)[P(x) \lor Q(x)] \not\models (\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$.
Además, un modelo de Herbrand de S es $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}$, $P^I = \{b\}$ y $Q^I = \{a\}$.

Solución del apartado (3): Para decidir si $(\exists x)[P(x) \land Q(x)] \models (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$ basta comprobar si $S = \{(\exists x)[P(x) \land Q(x)], \neg((\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x))$ es inconsistente. Comprobaremos la inconsistencia de S por resolución. Para ello, comenzamos calculando una forma clausal de S.

$$\begin{array}{ll} & (\exists x)[P(x) \land Q(x)] \\ \equiv_{sat} & P(a) \land Q(a) \\ \equiv & \{\{P(a)\}, \{Q(a)\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \neg((\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)) \\
\equiv & \neg((\exists x)P(x) \land (\exists y)Q(y)) \\
\equiv & \neg(\exists x)P(x) \lor \neg(\exists y)Q(y) \\
\equiv & (\forall x)\neg P(x) \lor (\forall y)\neg Q(y) \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x) \lor \neg Q(y)] \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg Q(y)\}\}
\end{array}$$

Una demostración por resolución de S es

1	$\{P(a)\}$	
2	$\{Q(a)\}$	
3	$\{\neg P(x), \neg Q(y)\}$	
4	$\{\neg Q(y)\}$	Resolvente de 1 y 3
5	$\square$	Resolvente de 2 y 4

Demostración por deducción natural:

1	$(\exists x)[P(x) \land Q(x)]$	premisa
2	actual $i, P(i) \land Q(i)$	supuestos
3	$P(i)$	E$\land$ 2
4	$(\exists x)P(x)$	I$\exists$ 3
5	$Q(i)$	E$\land$ 2
6	$(\exists x)Q(x)$	I$\exists$ 5
7	$(\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$	I$\land$ $4, 6$
8	$(\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$	E$\exists$ $1, 2-7$

Curso 2004–05

Examen de Abril de 2005 (primer parcial)

Examen de Abril de 2005 (primer parcial del Grupo 1)

Ejercicio 36 *Sea F la fórmula $p \vee q \leftrightarrow \neg r$. Calcular una forma normal conjuntiva de F y, a partir de ella, determinar los contramodelos de F y decidir si F es una tautología.*

Solución:

Cálculo de la forma normal conjuntiva:

$$\begin{array}{lll}
 & p \vee q \leftrightarrow \neg r & \\
\equiv & (p \vee q \to \neg r) \wedge (\neg r \to p \vee q) & \text{[por (1)]} \\
\equiv & (\neg(p \vee q) \vee \neg r) \wedge (\neg\neg r \vee p \vee q) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & ((\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r) \wedge (r \vee p \vee q) & \text{[por (3) y (5)]} \\
\equiv & ((\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \wedge (r \vee p \vee q) & \text{[por (7)]}
\end{array}$$

Los contramodelos de F son

	p	q	r
I_1	1		1
I_2		1	1
I_3	0	0	0

Por tanto, F no es una tautología.

Ejercicio 37 *Decidir, mediante deducción natural, si $\{p \to r, r \to \neg q\} \models \neg(p \wedge q)$.*

Solución:

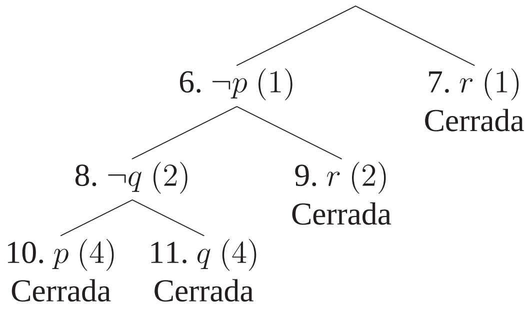
1	$p \to r$	premisa
2	$r \to \neg q$	premisa
3	$p \wedge q$	supuesto
4	p	E$\wedge$ 3
5	q	E$\wedge$ 3
6	r	E$\to$ $1, 4$
7	$\neg q$	E$\to$ $2, 6$
8	$\perp$	E$\neg$ $7, 5$
9	$\neg(p \wedge q)$	I$\neg$ $3 - 8$

Ejercicio 38 *Decidir, mediante tableros semánticos, si* $\{p \rightarrow r, q \rightarrow r\} \models p \lor q \rightarrow r$.

Solución:

El problema se reduce a decidir si $\{p \rightarrow r, q \rightarrow r, \neg(p \lor q \rightarrow r)\}$ es inconsistente; es decir, si tiene un tablero completo cerrado.

1. $p \rightarrow r$
2. $q \rightarrow r$
3. $\neg((p \lor q) \rightarrow r)$
4. $p \lor q$ (3)
5. $\neg r$ (3)



Como el tablero completo es cerrado, la relación de consecuencia se verifica.

Ejercicio 39 *¿Es cierto que si $F \rightarrow G$ y F son satisfacibles, entonces G es satisfacible? Si es cierto, dar una explicación. Si no es cierto, dar un contraejemplo.*

Solución:

Es falso. Un contraejemplo consiste en $F := p$ y $G := p \land \neg p$ ya que entonces $F \rightarrow G$ y F son satisfacibles (con el modelo I tal que $I(p) = 0$) pero G es insatisfacible.

Examen de Abril de 2005 (laboratorio de los grupos 1A y 1B)

Ejercicio 40 *Demostrar por deducción natural con Jape*

1. $p \lor q, \neg q \lor r \vdash p \lor r$.
2. $(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$.

Solución:

Solución del apartado 1. $p \lor q, \neg q \lor r \vdash p \lor r$

1	$p \lor q$	premisa
2	$\neg p \lor r$	premisa
3	p	supuesto
4	$p \lor r$	I$\lor$ 3
5	q	supuesto
6	$\neg q$	supuesto
7	$\bot$	E$\neg$ $6, 5$
8	$p \lor r$	E$\bot$ 7
9	r	supuesto
10	$p \lor r$	I$\lor$ 9
11	$p \lor r$	E$\lor$ $2, 6-8, 9-10$
12	$p \lor r$	E$\lor$ $1, 3-4, 5-11$

Solución del apartado 2. $\vdash (p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$

1	$p \to q$	supuesto
2	$\neg p \to q$	supuesto
3	$\neg q$	supuesto
4	$\neg p$	MT$1, 3$
5	q	E$\to$ $2, 4$
6	$\bot$	E$\neg$ $3, 5$
7	q	RAA$3-6$
8	$(\neg p \to q) \to q$	I$\to$ $2-7$
9	$(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$	I$\to$ $1-8$

Examen de Abril de 2005 (laboratorio del Grupo 1C)

Ejercicio 41 *Demostrar por deducción natural con Jape*

1. $(p \lor (q \rightarrow p)) \land q \vdash p$.
2. $\neg(p \land \neg q) \vdash p \rightarrow q$.

Solución:

Solución del apartado 1. $(p \lor (q \rightarrow p)) \land q \vdash p$

1	$(p \lor (q \rightarrow p)) \land q$	premisa
2	$p \lor (q \rightarrow p)$	E$\land$ 1
3	p	supuesto
4	$q \rightarrow p$	supuesto
5	q	E$\land$ 1
6	p	E$\rightarrow$ $4, 5$
7	p	E$\lor$ $2, 3-3, 4-6$

Solución del apartado 2. $\neg(p \land \neg q) \vdash p \rightarrow q$

1	$\neg(p \land \neg q)$	premisa
2	p	supuesto
3	$\neg q$	supuesto
4	$p \land \neg q$	I$\land$ $2, 3$
5	$\bot$	E$\neg$ $1, 4$
6	q	RAA$3-5$
7	$p \rightarrow q$	I$\rightarrow$ $2-6$

Examen de Abril de 2005 (primer parcial del Grupo 2)

Ejercicio 42 *Calcular una forma normal conjuntiva de la fórmula F sabiendo que está compuesta con las tres variables p, q y r y que, para toda interpretación I, se tiene que*

$$I(F) = \begin{cases} 1, & \textit{si } I(p) = I(\neg q \lor r) \\ 0, & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

Solución:

La fórmula F es equivalente a $p \leftrightarrow \neg q \lor r$. Por tanto, el cálculo de una FNC de F es

$$\begin{array}{ll} & p \leftrightarrow \neg q \lor r \\ \equiv & (p \rightarrow \neg q \lor r) \land (\neg q \lor r \rightarrow p) \\ \equiv & (\neg p \lor (\neg q \lor r)) \land (\neg(\neg q \lor r) \lor p) \\ \equiv & (\neg p \lor \neg q \lor r) \land ((\neg\neg q \land \neg r) \lor p) \\ \equiv & (\neg p \lor \neg q \lor r) \land ((q \land \neg r) \lor p) \\ \equiv & (\neg p \lor \neg q \lor r) \land (q \lor p) \land (\neg r \lor p) \end{array}$$

Una FNC de F es $(\neg p \lor \neg q \lor r) \land (q \lor p) \land (\neg r \lor p)$.

Ejercicio 43 *Calcular una forma normal disyuntiva de A y una forma normal conjuntiva de $\neg A$ siendo A la fórmula cuya tabla de verdad es*

p	q	r	A
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Solución:

- $FND(A) = (p \land q \land r) \lor (\neg p \land q \land \neg r)$
- $FNC(\neg A) = (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \land (p \lor \neg q \lor r)$

Ejercicio 44 *Decidir, mediante deducción natural, si*

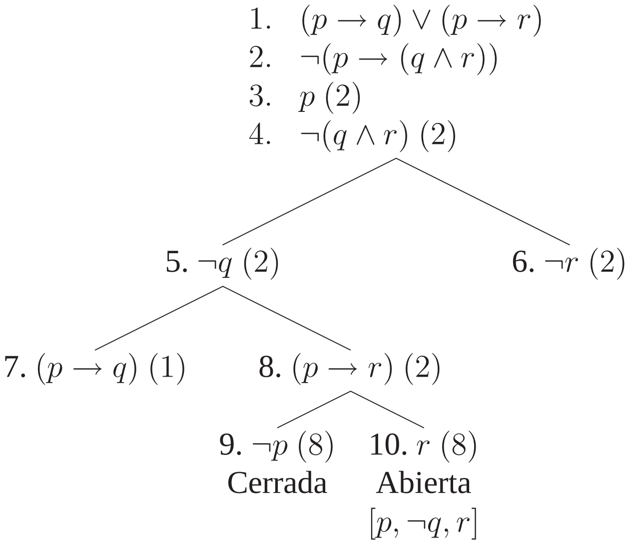
$(p \rightarrow q) \land (p \rightarrow r) \models p \rightarrow (q \land r)$.

Solución:

1	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	premisa
2	p	supuesto
3	$p \rightarrow q$	E$\wedge$ 1
4	q	E$\rightarrow$ $3, 2$
5	$p \rightarrow r$	E$\wedge$ 1
6	r	E$\rightarrow$ $5, 3$
7	$q \wedge r$	I$\wedge$ $4, 6$
8	$p \rightarrow (q \wedge r)$	I$\rightarrow$ $3-7$

Ejercicio 45 *Decidir, mediante tableros semánticos, si*
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \models p \rightarrow (q \wedge r)$.

Solución:
El problema se reduce a decidir si $\{(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r), \neg(p \rightarrow (q \wedge r))\}$ es inconsistente.



Por tanto, $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \not\models p \rightarrow (q \wedge r)$ y un contramodelo es la interpretación I tal que $I(p) = 1$, $I(q) = 0$ y $I(r) = 1$.

Examen de Abril de 2005 (laboratorio de los grupos 2A y 2B)

Ejercicio 46 *Demostrar por deducción natural con Jape*

1. $(p1 \rightarrow p2) \wedge (q1 \rightarrow q2) \vdash (p1 \wedge q1 \rightarrow p2 \wedge q2)$
2. $\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$

Solución:

Solución del apartado 1. $(p1 \rightarrow p2) \wedge (q1 \rightarrow q2) \vdash (p1 \wedge q1 \rightarrow p2 \wedge q2)$

1	$(p1 \rightarrow p2) \wedge (q1 \rightarrow q2)$	premisa
2	$p1 \wedge q1$	supuesto
3	$p1$	E$\wedge$ 2
4	$p1 \rightarrow p2$	E$\wedge$ 1
5	$p2$	E$\rightarrow$ $4,3$
6	$q1$	E$\wedge$ 2
7	$q1 \rightarrow q2$	E$\wedge$ 1
8	$q2$	E$\rightarrow$ $7,6$
9	$p2 \wedge q2$	I$\wedge$ $5,8$
10	$p1 \wedge q1 \rightarrow p2 \wedge q2$	I$\rightarrow$ $2-9$

Solución del apartado 2. $\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$

1	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	premisa
2	$\neg p$	supuesto
3	$\neg p \vee \neg q$	I$\vee$ 2
4	$\bot$	E$\neg$ $1,3$
5	p	RAA$2-4$
6	$\neg q$	supuesto
7	$\neg p \vee \neg q$	I$\vee$ 6
8	$\bot$	E$\neg$ $1,7$
9	q	RAA$6-8$
10	$p \wedge q$	I$\wedge$ $5,9$

Examen de Abril de 2005 (laboratorio de los Grupos 2C y 2D)

Ejercicio 47 *Demostrar por deducción natural con Jape*

1. $((p \to q) \lor (p \to r)) \to (p \to q \lor r)$.
2. $((\neg p \lor \neg q) \to (\neg p \land r)) \vdash \neg q \lor (p \lor r)$.

Solución:

Solución del apartado 1. $\vdash (p \to q) \lor (p \to r) \to (p \to q \lor r)$

1	$(p \to q) \lor (p \to r)$	supuesto
2	p	supuesto
3	$p \to q$	supuesto
4	q	E$\to$ $3, 2$
5	$q \lor r$	I$\lor$ 4
6	$p \to r$	supuesto
7	r	E$\to$ $6, 2$
8	$q \lor r$	I$\lor$ 7
9	$q \lor r$	E$\lor$ $1, 3-5, 6-8$
10	$p \to q \lor r$	I$\to$ $2-9$
11	$(p \to q) \lor (p \to r) \to (p \to q \lor r)$	I$\to$ $1-10$

Solución del apartado 2. $(\neg p \lor \neg q) \to (\neg p \land r) \vdash \neg q \lor (p \lor r)$

1	$(\neg p \lor \neg q) \to (\neg p \land r)$	premisa
2	$p \lor \neg p$	LEM
3	p	supuesto
4	$p \lor r$	I$\lor$ 3
5	$\neg q \lor (p \lor r)$	I$\lor$ 4
6	$\neg p$	supuesto
7	$\neg p \lor \neg q$	I$\lor$ 6
8	$\neg p \land r$	E$\to$ $1, 7$
9	r	E$\land$ 8
10	$p \lor r$	I$\lor$ 9
11	$\neg q \lor (p \lor r)$	I$\lor$ 10
12	$\neg q \lor (p \lor r)$	E$\lor$ $2, 3-5, 6-11$

Examen de Junio de 2005 (segundo parcial)

Examen de Junio de 2005 (segundo parcial del Grupo 1)

Ejercicio 48 *Decidir, mediante deducción natural, si*

$$\{(\forall x)[R(x) \to Q(x)], (\exists x)[P(x) \land \neg Q(x)]\} \models (\exists x)[P(x) \land \neg R(x)].$$

Ejercicio 49 *Decidir, mediante resolución, si*

$$\{((\forall x)P(x)) \to ((\forall x)Q(x))\} \models (\forall x)[P(x) \to Q(x)]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 50 *Decidir, mediante resolución, si la siguiente fórmula es válida*

$$\neg(\forall x)(\forall y)(\exists z)[R(x,y) \land (R(y,z) \to \neg R(z,z))]$$

Obtener, a partir de la resolución, un contramodelo en el caso de que no sea válida.

Ejercicio 51 *Decidir, mediante tableros semánticos, si*

$$\neg(\exists x)P(x) \models (\forall y)[((\exists z)P(z)) \to P(y)].$$

Examen de Junio de 2005 (laboratorio de los Grupos 1A y 1B)

Ejercicio 52 *Demostrar por deducción natural con Jape*

1. $\exists x.(p(x) \land q(x)), \forall y.(p(y) \to r(y)) \vdash \exists x.(r(x) \land q(x))$
2. $\forall x.r(x,x), \forall x.\forall y.\forall z.(\neg r(x,y) \land \neg r(y,z) \to \neg r(x,z)) \vdash \forall x.\forall y.(r(x,y) \lor r(y,x))$

Examen de Junio de 2005 (laboratorio del Grupo 1C)

Ejercicio 53 *Demostrar por deducción natural con Jape*

1. $\exists x.\exists y.(R(x,y) \lor R(y,x)) \vdash \exists x.\exists y.R(x,y)$
2. $\forall x.(p(x) \to \exists y.q(y)), actuali \vdash \forall x.\exists y.(p(x) \to q(y))$

Examen de Junio de 2005 (segundo parcial del Grupo 2)

Ejercicio 54 *Decidir, mediante deducción natural, si*

$$\{(\forall x)[P(x) \rightarrow \neg C(x)], (\exists x)[C(x) \wedge B(x)]\} \models (\exists x)[B(x) \wedge \neg P(x)]$$

Ejercicio 55 *Decidir, mediante resolución, si*

$$\models (\exists x)(\exists y)[P(x,y) \rightarrow (\forall x)(\forall y)P(x,y)].$$

Obtener un contramodelo en el caso de que no sea válida.

Ejercicio 56 *Decidir, mediante resolución, si*

$$\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\exists x)P(x)\} \models (\forall x)Q(x).$$

Obtener un contramodelo en el caso de que no sea válida.

Ejercicio 57 *Decidir, mediante tableros semánticos, si*

$$\{(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)\} \models (\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)].$$

Examen de Junio de 2005 (laboratorio de los Grupos 2A y 2B)

Ejercicio 58 *Demostrar por deducción natural con Jape*

1. $\forall x. \exists y. (p(x) \rightarrow q(y)) \vdash \forall x. (p(x) \rightarrow \exists y. q(y))$
2. $\neg \forall x. (p(x) \rightarrow q(a)) \vdash \exists x. p(x) \land \neg q(a)$

Examen de Junio de 2005 (laboratorio de los Grupos 2C y 2D)

Ejercicio 59 *Demostrar por deducción natural con Jape*

1. $\forall x.p(x), \forall x.(p(x) \rightarrow q(x) \vee r(x)), \exists x.\neg q(x) \vdash \exists x.r(x)$
2. $\forall x.\forall y.(r(x,y) \rightarrow r(y,x)), \forall x.\forall y.(r(x,y) \vee r(y,x))$
   $\vdash \forall x.\forall y.\forall z.(\neg r(x,y) \wedge \neg r(y,z) \rightarrow \neg r(x,z))$

Examen de Junio de 2005

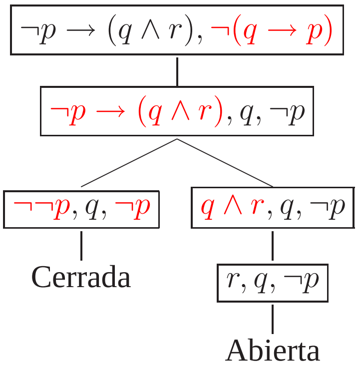
Ejercicio 60 *Decidir, mediante tablero semántico, si*

$$\{\neg p \rightarrow (q \land r)\} \models q \rightarrow p$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir del tablero.

Solución:

El tablero semántico correspondiente a la relación de consecuencia es



A partir de la hoja abierta $\{r, q, \neg p\}$ se tiene que la interpretación I tal que

$$I(p) = 0, I(q) = 1, I(r) = 1$$

es un contramodelo de la relación y, por tanto,

$$\{\neg p \rightarrow (q \land r)\} \not\models q \rightarrow p$$

Ejercicio 61 *Decidir, mediante resolución, si*

$$(\exists x)(\exists y)[(R(x,y) \lor P(x,y)) \rightarrow (\forall z)(\forall w)[R(z,w) \land Q(z,w)]]$$

es consecuencia lógica de

$$\neg(\exists x)(\exists y)[Q(x,y) \rightarrow P(x,y)]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar se calcula la forma clausal de la premisa:

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x)(\exists y)[Q(x,y) \rightarrow P(x,y)] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)\neg(Q(x,y) \rightarrow P(x,y)) \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[Q(x,y) \land \neg P(x,y)] \\ \equiv & \{\{Q(x,y)\}, \{\neg P(x,y)\}\} \end{array}$$

En segundo lugar se calcula la forma clausal de la negación de la conclusión:

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)(\exists y)[(R(x,y) \vee P(x,y)) \rightarrow (\forall z)(\forall w)[R(z,w) \wedge Q(z,w)]] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)\neg((R(x,y) \vee P(x,y)) \rightarrow (\forall z)(\forall w)[R(z,w) \wedge Q(z,w)]) \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[(R(x,y) \vee P(x,y)) \wedge \neg(\forall z)(\forall w)[R(z,w) \wedge Q(z,w)]] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[(R(x,y) \vee P(x,y)) \wedge (\exists z)(\exists w)\neg(R(z,w) \wedge Q(z,w))] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[R(x,y) \vee P(x,y)] \wedge (\exists z)(\exists w)[\neg R(z,w) \vee \neg Q(z,w)]] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[R(x,y) \vee P(x,y)] \wedge (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\exists w)[\neg R(z,w) \vee \neg Q(z,w)] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[R(x,y) \vee P(x,y)] \wedge (\forall x)(\forall y)(\exists w)[\neg R(f(x,y),w) \vee \neg Q(f(x,y),w)] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[R(x,y) \vee P(x,y)] \wedge (\forall x)(\forall y)[\neg R(f(x,y),g(x,y)) \vee \neg Q(f(x,y),g(x,y))] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[(R(x,y) \vee P(x,y)) \wedge (\neg R(f(x,y),g(x,y)) \vee \neg Q(f(x,y),g(x,y)))] \\
\equiv & \{\{R(x,y),P(x,y)\}\},\{\neg R(f(x,y),g(x,y)),\neg Q(f(x,y),g(x,y))\}\}
\end{array}$$

El problema de decidir si se verifica la relación de consecuencias se reduce al de decidir si el conjunto S de las cláusulas obtenidas es inconsistente. Este último problema se reduce a determinar si se puede obtener la cláusula vacía por resolución a partir de S.

Veamos cómo puede obtenerse la cláusula vacía por resolución a partir de S. Los elementos de S son

$$\begin{array}{ll}
C_1 & := \{Q(x,y)\} \\
C_2 & := \{\neg P(x,y)\} \\
C_3 & := \{R(x,y),P(x,y)\} \\
C_4 & := \{\neg R(f(x,y),g(x,y)),\neg Q(f(x,y),g(x,y))\}
\end{array}$$

Por resolución de C_2 y C_3 se obtiene

$$C_5 := \{R(x,y)\}$$

Por resolución de C_5 y C_4 aplicando a C_5 el renombramiento $\{x/x', y/y'\}$ y usando el unificador $\{x'/f(x,y), y'/g(x,y)\}$ se obtiene

$$C_6 := \{\neg Q(f(x,y),g(x,y))\}$$

Por resolución de C_6 y C_1 aplicando a C_1 el renombramiento $\{x/x', y/y'\}$ y usando el unificador $\{x'/f(x,y), y'/g(x,y)\}$ se obtiene

$$C_7 := \square$$

Ejercicio 62 *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Si F es una fórmula satisfacible, entonces todas las subfórmulas de F son satisfacibles.*
2. *Existen fórmulas válidas tales que todas sus subfórmulas son válidas.*

Solución:

Solución del apartado 1: La proposición es falsa. Un contraejemplo es la fórmula $F := \neg(p \wedge \neg p)$. La fórmula F es satisfacible (de hecho, F es válida) y la subfórmula $p \wedge \neg p$ de F no es satisfacible.

Solución del apartado 2: La proposición es falsa ya que toda fórmula tiene alguna subfórmula atómica y para cada fórmula atómica existe alguna interpretación en la que no se verifica.

Ejercicio 63 *Se sabe que:*

- *Si todo el que estudia aprueba, entonces todo el que estudia recibe un regalo.*
- *Hay quien estudia y no recibe ningún regalo.*
- *No es verdad que todo el que estudia aprueba.*

Formalizar los conocimientos anteriores y probar que el conjunto de fórmulas obtenidas es consistente, proporcionando una estructura que sea modelo de cada una de las fórmulas.

Solución:

Para la formalización, usaremos el siguiente lenguaje:

$E(x)$: “x estudia”
$A(x)$: “x aprueba”
$R(x)$: “x recibe un regalo”

Las fórmulas correspondientes a los conocimientos del problema son:

$$\begin{array}{l}
(\forall x)[E(x) \rightarrow A(x)] \rightarrow (\forall y)[E(y) \rightarrow R(y)] \\
(\exists x)[E(x) \land \neg R(x)] \\
\neg(\forall x)[E(x) \rightarrow A(x)]
\end{array}$$

Buscaremos el modelo mediante el método de los tableros semánticos:

$$\begin{array}{rl}
1. & (\forall x)[E(x) \rightarrow A(x)] \rightarrow (\forall y)[E(y) \rightarrow R(y)] \\
2. & (\exists x)[E(x) \land \neg R(x)] \\
3. & \neg(\forall x)[E(x) \rightarrow A(x)]
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
4. & \neg(\forall x)[E(x) \rightarrow A(x)]\ (1) & 5.\ (\forall y)[E(y) \rightarrow R(y)]\ (1) \\
6. & E(a) \land \neg R(a)\ (2) & \\
7. & E(a)\ (6) & \\
8. & \neg R(a)\ (6) & \\
9. & \neg(E(b) \rightarrow A(b))\ (3) & \\
10. & E(b)\ (9) & \\
11. & \neg A(b)\ (9) &
\end{array}$$

La rama izquierda es una rama completa y abierta. Por tanto, se puede extraer un modelo a partir de dicha rama. El universo es $U = \{a, b\}$ y la interpretación de las relaciones es $I(E) =$

$\{a, b\}$, $I(A) = \emptyset$, $I(R) = \emptyset$. Además, al no distinguirse b de a en las interpretaciones puede identificarse con a dando lugar a un nuevo modelo con universo $U' = \{a\}$ e interpretaciones $I'(E) = \{a\}$, $I'(A) = \emptyset$, $I'(R) = \emptyset$.

Ejercicio 64 *Probar mediante deducción natural:*

1. $p \land \neg(q \to r) \vdash (p \land q) \land \neg r$
2. $\neg(\forall x)P(x) \vdash (\exists x)\neg P(x)$
3. $\{(\forall x)(\forall y)[((\exists z)R(y, z)) \to R(x, y)],\ (\exists x)(\exists y)R(x, y)\} \vdash (\forall x)(\forall y)R(x, y)$

Solución:

Solución del apartado 1: $p \land \neg(q \to r) \vdash (p \land q) \land \neg r$

1	$p \land \neg(q \to r)$	premisa
2	p	E$\land$ 1
3	$\neg q$	supuesto
4	$\neg(q \to r)$	E$\land$ 1
5	q	supuesto
6	$\neg r$	supuesto
7	$\bot$	E$\neg$ $5, 3$
8	r	RAA $6 - 7$
9	$q \to r$	I$\to$ $5 - 8$
10	$\bot$	E$\neg$ $4, 9$
11	q	RAA $3 - 10$
12	$p \land q$	I$\land$ $2, 11$
13	r	supuesto
14	$\neg(q \to r)$	E$\land$ 1
15	q	supuesto
16	r	hipotesis 13
17	$q \to r$	I$\to$ $15 - 16$
18	$\bot$	E$\neg$ $14, 17$
19	$\neg r$	I$\neg$ $13 - 18$
20	$(p \land q) \land \neg r$	I$\land$ $12, 19$

Solución del apartado 2: $\neg(\forall x)P(x) \vdash (\exists x)\neg P(x)$

1	$\neg(\forall x)P(x)$	premisa
2	$\neg(\exists x)\neg P(x)$	supuesto
3	actual i	supuesto
4	$\neg P(i)$	supuesto
5	$(\exists x)\neg P(x)$	I$\exists$ $4, 3$
6	$\bot$	E$\neg$ $2, 5$
7	$P(i)$	RAA $4 - 6$
8	$(\forall x)P(x)$	I$\forall$ $3 - 7$
9	$\bot$	E$\neg$ $1, 8$
10	$(\exists x)\neg P(x)$	RAA $2 - 9$

Solución del apartado 3:
$\{(\forall x)(\forall y)[((\exists z)R(y,z)) \to R(x,y)],\ (\exists x)(\exists y)R(x,y)\} \ \vdash\ (\forall x)(\forall y)R(x,y)$

1	$(\forall x)(\forall y)[((\exists z)R(y,z)) \to R(x,y)]$	premisa
2	$(\exists x)(\exists y)R(x,y)$	supuesto
3	actual a	supuesto
4	actual b	supuesto
5	actual c, $(\exists y)R(c,y)$	supuestos
6	actual d, $R(c,d)$	supuestos
7	$(\forall y)[((\exists z)R(y,z)) \to R(a,y)]$	E$\forall$ $1, 3$
8	$((\exists z)R(b,z)) \to R(a,b)$	E$\forall$ $7, 4$
9	$(\forall y)[((\exists z)R(y,z)) \to R(b,y)]$	E$\forall$ $1, 4$
10	$((\exists z)R(c,z)) \to R(b,c)]$	E$\forall$ $9, 5{,}1$
11	$R(b,c)$	E$\to$ $10, 5{,}2$
12	$(\exists z)R(b,z)$	I$\exists$ $11, 5{,}1$
13	$R(a,b)$	E$\to$ $8, 12$
14	$R(a,b)$	E$\exists$ $5{,}2, 6 - 13$
15	$R(a,b)$	E$\exists$ $2, 5 - 14$
16	$(\forall y)R(a,y)$	I$\forall$ $4 - 15$
17	$(\forall x)(\forall y)R(x,y)$	I$\forall$ $3 - 16$

Examen de Septiembre de 2005

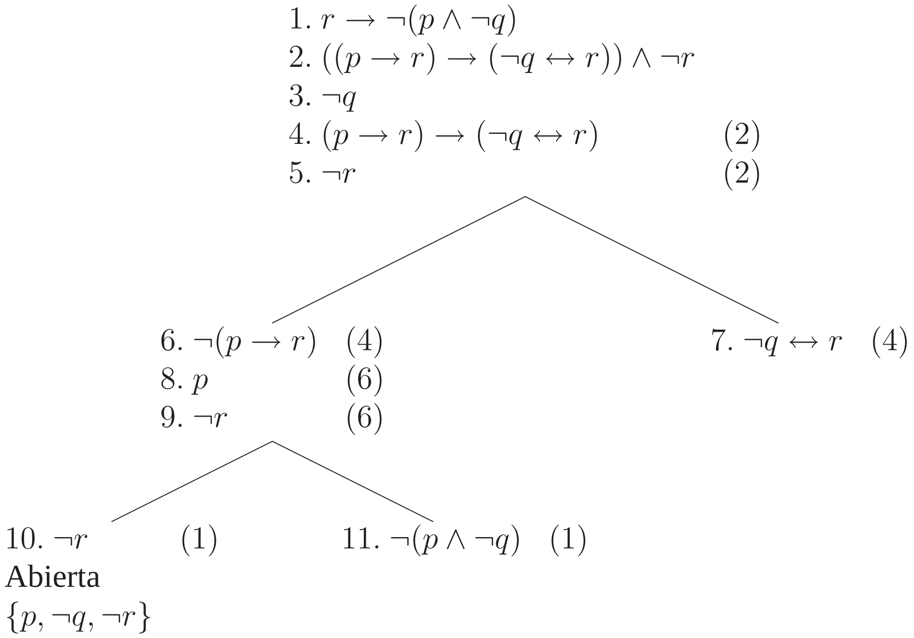
Ejercicio 65 *Decidir, mediante tablero semántico, si*

1. $\{r \to \neg(p \land \neg q),\ ((p \to r) \to (\neg q \leftrightarrow r)) \land \neg r\} \models q$
2. $\models ((p \to q) \to r) \to (q \to r)$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir del tablero.

Solución:

Apartado 1. El tablero correpondiente al primer apartado es

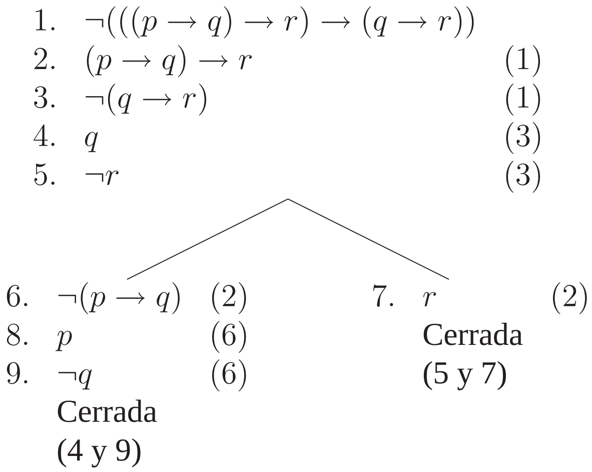


Puesto que el tablero tiene una rama abierta, resulta que

$$\{r \to \neg(p \land \neg q),\ ((p \to r) \to (\neg q \leftrightarrow r)) \land \neg r\} \not\models q$$

Un contramodelo es la valoración v tal que $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ y $v(r) = 0$.

Apartado 2. El tablero correpondiente al segundo apartado es



1.	$\neg(((p \to q) \to r) \to (q \to r))$	
2.	$(p \to q) \to r$	(1)
3.	$\neg(q \to r)$	(1)
4.	q	(3)
5.	$\neg r$	(3)

6.	$\neg(p \to q)$	(2)	7.	r	(2)
8.	p	(6)		Cerrada	
9.	$\neg q$	(6)		(5 y 7)	
	Cerrada				
	(4 y 9)				

Puesto que el tablero es cerrado, resulta que

$$\models ((p \to q) \to r) \to (q \to r)$$

Ejercicio 66 *Decidir, mediante resolución, si*

$$\models (\exists x)(\forall y)(\forall z)[(P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x)))]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

La fórmula

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)[(P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x)))]$$

es válida syss

$$\{\neg(\exists x)(\forall y)(\forall z)[(P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x)))]\}$$

es inconsistente. Para decidir su consistencia, empezamos calculando su forma clausular.

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)(\forall y)(\forall z)[(P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x)))] \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)(\exists z)[\neg((P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x)))] \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)(\exists z)[(P(y) \to Q(z)) \land \neg(P(x) \to Q(x))] \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)(\exists z)[(\neg P(y) \lor Q(z)) \land (P(x) \land \neg Q(x))] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[(\neg P(f(x)) \lor Q(g(x))) \land (P(x) \land \neg Q(x))] \\
\equiv & \{\{\neg P(f(x)), Q(g(x))\}, \{P(x)\}, \{\neg Q(x)\}\}
\end{array}$$

Una demostración por resolución es

1	$\{\neg P(f(x)), Q(g(x))\}$	Hipótesis
2	$\{P(x)\}$	Hipótesis
3	$\{\neg Q(x)\}$	Hipótesis
4	$\{Q(g(x))\}$	Resolvente de 1 y 2 con $\theta_2 = [x/x_2]$ y $\sigma = [x_2/f(x)]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4 con $\theta_1 = [x/x_3]$ y $\sigma = [x_3/g(x)]$

Al obtenerse la cláusula vacía por resolución a partir de la forma clausular de

$$\{\neg(\exists x)(\forall y)(\forall z)[(P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x))]\}$$

resulta que el conjunto es inconsistente y, por tanto,

$$\models (\exists x)(\forall y)(\forall z)[(P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x))]$$

Ejercicio 67 *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Para todo conjunto de fórmula S y para toda fórmula F se verifica que si $S \not\models F$ entonces $S \models \neg F$.*
2. *Para toda fórmula F se tiene que si G es una forma de Skolem de F entonces $\models F \leftrightarrow G$.*

Solución:

Solución del apartado 1. El apartado 1 es falso. Un ejemplo que lo refuta consiste en tomar como S el conjunto $\emptyset$ y como F la fórmula p, ya que $\emptyset \not\models p$ (un contramodelo es la valoración v tal que $v(p) = 0$) y $\emptyset \not\models \neg p$ (un contramodelo es la valoración v tal que $v(p) = 1$).

Solución del apartado 2. El apartado 2 es falso. Un ejemplo que lo refuta consiste en tomar como F la fórmula $(\exists x)P(x)$ y como G la fórmula $P(a)$, ya que $\not\models (\exists x)P(x) \leftrightarrow P(a)$ (un contramodelo es la interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}$, $a^I = 1$ y $P^I = \{2\}$).

Ejercicio 68 *En una pecera nadan una serie de peces. Se observa que:*

1. *Hay algún pez x que para cualquier pez y, si el pez x no se come al pez y entonces existe un pez z tal que z es un tiburón o bien z protege al pez y.*
2. *No hay ningún pez que se coma a todos los demás.*
3. *Ningún pez protege a ningún otro.*

Decidir, utilizando el método de resolución, si de las observaciones se deduce que existe algún tiburón en la pecera.
*(*NOTA: *En la formalización, usar el siguiente glosario $C(x, y)$ significa que “x se come a y”, $P(x, y)$ significa que “x protege a y” y $T(x)$ significa que “x es un tiburón”.)*

Solución:

La formalización de las observaciones y de la negación de la conclusión es:

1. Hay algún pez x que para cualquier pez y, si el pez x no se come al pez y entonces existe un pez z tal que z es un tiburón o bien z protege al pez y.

   $$(\exists x)(\forall y)[\neg C(x, y) \to (\exists z)[T(z) \lor P(z, y)]].$$

2. No hay ningún pez que se coma a todos los demás.

   $$\neg(\exists x)(\forall y)C(x, y).$$

3. Ningún pez protege a ningún otro.

$$\neg(\exists x)(\exists y)P(x,y).$$

4. No existe ningún tiburón en la pecera.

$$\neg(\exists x)T(x).$$

Para aplicar la resolución, se necesita calcular las formas clausulares de las fórmulas anteriores.

$$\begin{array}{lll}
 & (\exists x)(\forall y)[\neg C(x,y) \rightarrow (\exists z)[T(z) \lor P(z,y)]] & \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)[\neg\neg C(x,y) \lor (\exists z)[T(z) \lor P(z,y)]] & \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)[C(x,y) \lor (\exists z)[T(z) \lor P(z,y)]] & \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[C(x,y) \lor T(z) \lor P(z,y)] & \\
\equiv_{sat} & (\forall y)(\exists z)[C(a,y) \lor T(z) \lor P(z,y)] & a \text{ constante de Skolem} \\
\equiv_{sat} & (\forall y)[C(a,y) \lor T(f(y)) \lor P(f(y),y)] & f \text{ función de Skolem} \\
\equiv & \{\{C(a,y), T(f(y)), P(f(y),y)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & \neg(\exists x)(\forall y)C(x,y) & \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)\neg C(x,y) & \\
\equiv_{sat} & (\forall x)\neg C(x,g(x)) & g \text{ función de Skolem} \\
\equiv & \{\{\neg C(x,g(x))\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)(\exists y)P(x,y) \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)\neg P(x,y) \\
\equiv & \{\{\neg P(x,y)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)T(x) \\
\equiv & (\forall x)\neg T(x) \\
\equiv & \{\{\neg T(x)\}\}
\end{array}$$

Una demostración por resolución a partir de las cláusulas anteriores es

1	$\{C(a,y), T(f(y)), P(f(y),y)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg C(x,g(x))\}$	Hipótesis
3	$\{\neg P(x,y)\}$	Hipótesis
4	$\{\neg T(x)\}$	Hipótesis
5	$\{C(a,y), P(f(y),y)\}$	Resolvente de 4 y 1 con $\sigma = [x/f(y)]$
6	$\{P(f(g(a)),g(a))\}$	Resolvente de 5 y 2 con $\sigma = [x/a, y/g(a)]$
7	$\square$	Resolvente de 6 y 3 con $\sigma = [x/g(a), y/g(a)]$

Por tanto, de las observaciones se deduce que existe algún tiburón en la pecera.

Ejercicio 69 *Probar mediante deducción natural:*

1. $\vdash ((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p) \rightarrow p$

2. $\exists x.(P(x) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow \forall y.(P(y) \rightarrow R(y))$,
   $\exists x.(P(x) \wedge S(x))$,
   $\forall x.(P(x) \rightarrow \neg R(x))$
   $\vdash \exists x.(S(x) \wedge Q(x))$

3. $\vdash \neg \exists x.\forall y.(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y))$

Solución:

Solución del apartado 1: $\vdash ((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p) \rightarrow p$

1	$p \vee \neg p$	LEM
2	p	supuesto
3	$(p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p$	supuesto
4	p	hyp2
5	$((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p) \rightarrow p$	I$\rightarrow$ $3-4$
6	$\neg p$	supuesto
7	$(p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p$	supuesto
8	$\neg(p \rightarrow (q \wedge \neg r))$	MT$6,7$
9	p	supuesto
10	$\bot$	E$\neg$ $9,6$
11	$q \wedge \neg r$	E$\bot$ 10
12	$p \rightarrow (q \wedge \neg r)$	I$\rightarrow$ $9-11$
13	$\bot$	E$\neg$ $12,8$
14	p	E$\bot$ 13
15	$((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p) \rightarrow p$	I$\rightarrow$ $7-14$
16	$((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p) \rightarrow p$	E$\vee$ $1,2-5,6-15$

Solución del apartado 2: $\exists x.(P(x) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow \forall y.(P(y) \rightarrow R(y))$,
$\exists x.(P(x) \wedge S(x))$,
$\forall x.(P(x) \rightarrow \neg R(x))$
$\vdash \exists x.(S(x) \wedge Q(x))$

1	$(\exists x)[P(x) \wedge \neg Q(x)] \rightarrow (\forall y)[P(y) \rightarrow R(y)]$	premisa
2	$(\exists x)[P(x) \wedge S(x)]$	premisa
3	$(\forall x)[P(x) \rightarrow \neg R(x)]$	premisa
4	actual $i, P(i) \wedge S(i)$	supuesto
5	$S(i)$	E$\wedge$ 4
6	$\neg Q(i)$	supuesto
7	$P(i)$	E$\wedge$ 4
8	$P(i) \wedge \neg Q(i)$	I$\wedge$ $7, 6$
9	$(\exists x)[P(x) \wedge \neg Q(x)]$	I$\exists$ $7, 6$
10	$(\forall y)[P(y) \rightarrow R(y)]$	E$\rightarrow$ $1, 9$
11	$P(i) \rightarrow R(i)$	E$\forall$ $10, 4$
12	$P(i) \rightarrow \neg R(i)$	E$\forall$ $3, 4$
13	$R(i)$	E$\rightarrow$ $11, 7$
14	$\neg R(i)$	E$\rightarrow$ $12, 7$
15	$\perp$	E$\neg$ $13, 14$
16	$Q(i)$	RAA $6 - 15$
17	$S(i) \wedge Q(i)$	I$\wedge$ $5, 16$
18	$(\exists x)[S(x) \wedge Q(x)]$	I$\exists$ $17, 4$
19	$(\exists x)[S(x) \wedge Q(x)]$	E$\exists$ $2, 4 - 18$

Solución del apartado 3: $\vdash \neg\exists x.\forall y.(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y))$

1	$(\exists x)(\forall y)[P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y)]$	supuesto
2	actual $i, (\forall y)[P(y,i) \leftrightarrow \neg P(y,y)]$	supuestos
3	$P(i,i) \leftrightarrow \neg P(i,i)$	E$\forall$ 2
4	$P(i,i) \vee \neg P(i,i)$	LEM
5	$P(i,i)$	supuesto
6	$P(i,i) \to \neg P(i,i)$	E$\leftrightarrow$ 3
7	$\neg P(i,i)$	E$\to$ $6,5$
8	$\bot$	E$\neg$ $5,7$
9	$\neg P(i,i)$	supuesto
10	$\neg P(i,i) \to P(i,i)$	E$\leftrightarrow$ 3
11	$P(i,i)$	E$\to$ $10,9$
12	$\bot$	E$\neg$ $11,9$
13	$\bot$	E$\vee$ $4, 5-8, 9-12$
14	$\bot$	E$\exists$ $1, 2-13$
15	$\neg(\exists x)(\forall y)[P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y)]$	E$\neg$ $1-14$

Examen de Diciembre de 2005

Ejercicio 70 *Probar mediante deducción natural (usando Jape si lo deseas)*

1. $\vdash (p \rightarrow \neg q) \wedge (p \rightarrow \neg r) \rightarrow (p \rightarrow \neg(q \vee r))$

2. $\forall x.(\exists y.R(x,y) \rightarrow \exists y.(\forall z.R(y,z) \wedge R(x,y))), \exists x.\exists y.R(x,y) \vdash \exists x.\forall y.R(x,y)$

3. $\forall x.(P(x) \rightarrow \forall y.(Q(y) \rightarrow R(x,y))), \exists x.(P(x) \wedge \exists y.\neg R(x,y)) \vdash \neg\forall x.Q(x)$

Solución:

Solución del apartado 1: $\vdash (p \rightarrow \neg q) \wedge (p \rightarrow \neg r) \rightarrow (p \rightarrow \neg(q \vee r))$

1	$(p \rightarrow \neg q) \wedge (p \rightarrow \neg r)$	supuesto
2	p	supuesto
3	$q \vee r$	supuesto
4	q	supuesto
5	$p \rightarrow \neg q$	E$\wedge$ 1
6	$\neg q$	E$\rightarrow$ $5, 2$
7	$\bot$	E$\neg$ $4, 6$
8	r	supuesto
9	$p \rightarrow \neg r$	E$\wedge$ 1
10	$\neg r$	E$\rightarrow$ $9, 8$
11	$\bot$	E$\neg$ $8, 10$
12	$\bot$	E$\vee$ $3, 4-7, 8-11$
13	$\neg(q \vee r)$	I$\neg$ $3-12$
14	$p \rightarrow \neg(q \vee r)$	I$\rightarrow$ $2-13$
15	$(p \rightarrow \neg q) \wedge (p \rightarrow \neg r) \rightarrow (p \rightarrow \neg(q \vee r))$	I$\rightarrow$ $1-14$

Solución del apartado 2:

$$\forall x.(\exists y.R(x,y) \rightarrow \exists y.(\forall z.R(y,z) \wedge R(x,y))), \exists x.\exists y.R(x,y) \vdash \exists x.\forall y.R(x,y)$$

1	$\forall x.(\exists y.R(x,y) \rightarrow \exists y.(\forall z.R(y,z) \wedge R(x,y)))$	premisa
2	$\exists x.\exists y.R(x,y)$	premisa
3	actual $j, \exists y.R(j,y)$	supuesto
4	$\exists y.R(j,y) \rightarrow \exists y.(\forall z.R(y,z) \wedge R(j,y))$	E$\forall$ $1, 2{,}1$
5	$\exists y.(\forall z.R(y,z) \wedge R(j,y))$	E$\rightarrow$ $4, 2{,}2$
6	actual $k, \forall z.R(k,z) \wedge R(j,k)$	supuesto
7	$\forall z.R(k,z)$	E$\wedge$ $6{,}2$
8	$\exists x.\forall y.R(x,y)$	I$\exists$ 7
9	$\exists x.\forall y.R(x,y)$	E$\exists$ $6-8$
10	$\exists x.\forall y.R(x,y)$	E$\exists$ $2, 3-9$

Solución del apartado 3:

$$\forall x.(P(x) \rightarrow \forall y.(Q(y) \rightarrow R(x,y))), \exists x.(P(x) \wedge \exists y.\neg R(x,y)) \vdash \neg \forall x.Q(x)$$

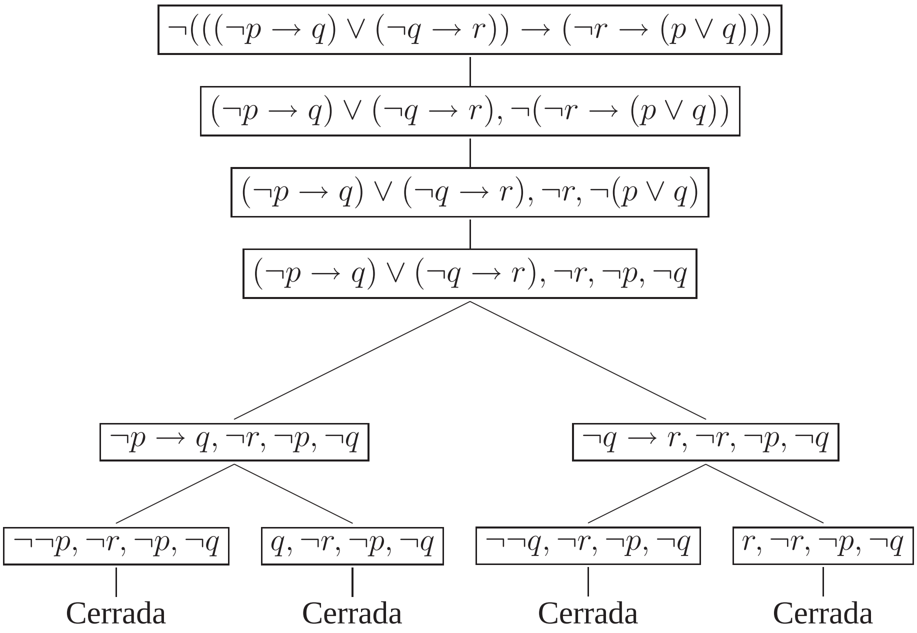
1	$\forall x.(P(x) \rightarrow \forall y.(Q(y) \rightarrow R(x,y)))$	premisa
2	$\exists x.(P(x) \wedge \exists y.\neg R(x,y))$	premisa
3	$\forall x.Q(x)$	supuesto
4	actual $i, P(i) \wedge \exists y.\neg R(i,y)$	supuesto
5	$\exists y.\neg R(i,y)$	E$\wedge$ 4
6	actual $j, \neg R(i,j)$	supuesto
7	$P(i) \rightarrow \forall y.(Q(y) \rightarrow R(i,y))$	E$\forall$ $1, 4{,}1$
8	$P(i)$	E$\wedge$ $4{,}2$
9	$\forall y.(Q(y) \rightarrow R(i,y))$	E$\rightarrow$ $7, 8$
10	$Q(j) \rightarrow R(i,j)$	E$\forall$ $9, 6{,}1$
11	$Q(j)$	E$\forall$ $3, 6{,}1$
12	$R(i,j)$	E$\rightarrow$ $10, 11$
13	$\bot$	E$\neg$ $5{,}2, 12$
14	$\bot$	E$\exists$ $5, 6-13$
15	$\bot$	E$\exists$ $2, 4-14$
16	$\neg \forall x.Q(x)$	I$\neg$ $3-15$

Ejercicio 71 *Mediante tableros semánticos, determinar cuáles de las siguientes fórmulas son tautologías y calcular una forma normal conjuntiva de las que no lo sean.*

1. $((\neg p \to q) \lor (\neg q \to r)) \to (\neg r \to (p \lor q))$
2. $((\neg p \to q) \lor (\neg q \to r)) \to ((\neg p \lor \neg q) \to r)$

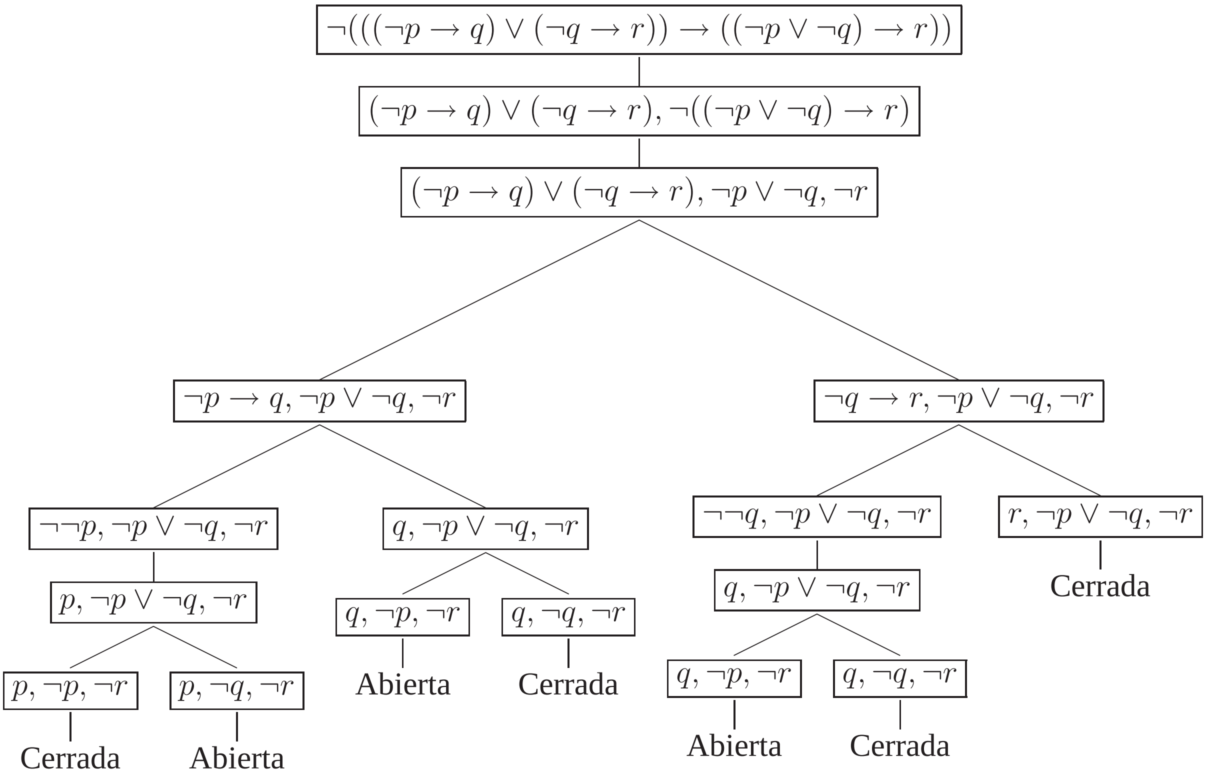
Solución:

Solución del apartado 1: El árbol semántico correspondiente a la negación de la fórmula es



Como todas las ramas son cerradas, la fórmula dada es una tautología.

Solución del apartado 2: El árbol semántico correspondiente a la negación de la fórmula es



Como hay ramas abiertas, la forma dada no es tautología.

A partir del tablero podemos calcula una forma normal conjuntiva de la fórmula dada F. La fórmula inicial del tablero es $\neg F$ y las hojas abiertas son $\{p, \neg q, \neg r\}$ y $\{q, \neg p, \neg r\}$. Por tanto,

$$\neg F \equiv (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p \wedge \neg r)$$

Por consiguiente,

$$\neg\neg F \equiv \neg((p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p \wedge \neg r))$$

y

$$F \equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee p \vee r))$$

Una forma normal conjuntiva de la fórmula $((\neg p \rightarrow q) \vee (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow ((\neg p \vee \neg q) \rightarrow r)$ es $(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee p \vee r))$

Ejercicio 72 *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Sean G_1 una forma normal disyuntiva de F_1 y G_2 una forma normal disyuntiva de F_2. Si F_1 y F_2 son equivalentes, entonces G_1 y G_2 son fórmulas iguales.*

2. *Para toda fórmula F se tiene que si G_1 es una forma normal conjuntiva de F y G_2 es una forma normal normal disyuntiva de F, entonces G_1 y G_2 son fórmulas distintas.*

Solución:

Solución del apartado 1: La proposición es falsa. Para obterner un contraejemplo se condideran F_1 como la fórmula p, F_2 como la fórmula p, G_1 como la fórmula p y G_2 como la fórmula $p \lor q \lor \neg q$. Entonces, F_1 y F_2 son equivalentes, G_1 es una forma normal diyuntiva de F_1, G_2 es una forma normal diyuntiva de F_2 y G_1 no es igual que G_2.

Solución del apartado 1: La proposición es falsa. Para obterner un contraejemplo se condideran como F, G_1 y G_2 la fórmula p. Entonces, G_1 es una forma normal conjuntiva de F, G_2 es una forma normal normal disyuntiva de F y G_1 es igual que G_2.

Ejercicio 73 *Consideremos los dos siguientes enunciados en castellano*

- E_1: *Algunos robots sólo obedecen a los amigos del programador jefe.*
- E_2: *Todos los robots obedecen a los amigos del programador jefe.*

y las cuatro fórmulas que siguen

- F_1: $(\forall x)(\forall y)[P(x) \land S(y,c) \to R(x,y)]$
- F_2: $(\exists x)[P(x) \land (\forall y)[R(x,y) \to S(y,c)]]$
- F_3: $(\forall y)[S(y,c) \to \neg(\exists x)[P(x) \land \neg R(x,y)]]$
- F_4: $(\exists x)(\forall y)[P(x) \land \neg(R(x,y) \land \neg S(y,c))]$

1. *En una interpretación adecuada, dos de las fórmulas formalizan E_1 y las otras dos formalizan E_2. Explicar cuál es la interpretación y cuáles son las fórmulas que corresponden a cada uno de los dos enunciados.*
2. *Demostrar, calculando sus forma clausales, que las dos fórmulas correspondientes a E_1 son lógicamente equivalentes. Hacer lo mismo con las dos fórmulas correspondientes a E_2.*
3. *Consideremos ahora los nuevos enunciados:*
    - E_3: *Alvaro es amigo del programador jefe, pero Benito no le obedece.*
    - E_4: *Benito no es un robot.*

   Demostrar, mediante resolución, que E_4 es consecuencia de E_2 y E_3.

Solución:

Solución del apartado 1: La interpretación adecuada de los símbolos de las fórmulas es

$P(x)$: x es un robot
$R(x,y)$: x obedece a y
$S(x,y)$: x es amigo de y
c : el programador jefe

Las fórmulas F_1 y F_3 representan el enunciado E_2 y las fórmulas F_2 y F_4 representan el enunciado E_1.

Solución del apartado 2: Para probar la equivalencia de las fórmulas que representan el enunciado E_2, calculamos una forma clausal de F_1

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)(\forall y)[P(x) \land S(y,c) \to R(x,y)] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg(P(x) \land S(y,c)) \lor R(x,y)] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[(\neg P(x) \lor \neg S(y,c)) \lor R(x,y)] \\ \equiv & \{\{\neg P(x), \neg S(y,c), R(x,y)\}\} \end{array}$$

y una forma clausal de F_3

$$\begin{array}{ll} & (\forall y)[S(y,c) \to \neg(\exists x)[P(x) \land \neg R(x,y)]] \\ \equiv & (\forall y)[\neg S(y,c) \lor \neg(\exists x)[P(x) \land \neg R(x,y)]] \\ \equiv & (\forall y)[\neg S(y,c) \lor (\forall x)[\neg(P(x) \land \neg R(x,y))]] \\ \equiv & (\forall y)[\neg S(y,c) \lor (\forall x)[\neg P(x) \lor \neg\neg R(x,y)]] \\ \equiv & (\forall y)[\neg S(y,c) \lor (\forall x)[\neg P(x) \lor R(x,y)]] \\ \equiv & (\forall y)(\forall x)[\neg S(y,c) \lor (\neg P(x) \lor R(x,y))] \\ \equiv & \{\{\neg S(y,c), \neg P(x), R(x,y))\}\} \end{array}$$

Puesto que

$$\{\{\neg P(x), \neg S(y,c), R(x,y)\}\} = \{\{\neg S(y,c), \neg P(x), R(x,y))\}\}$$

las fórmulas F_1 y F_3 son equivalentes.

Para probar la equivalencia de las fórmulas que representan el enunciado E_1, calculamos una forma clausal de F_2

$$\begin{array}{ll} & (\exists x)[P(x) \land (\forall y)[R(x,y) \to S(y,c)]] \\ \equiv & (\exists x)(\forall y)[P(x) \land (R(x,y) \to S(y,c))] \\ \equiv & (\exists x)(\forall y)[P(x) \land (\neg R(x,y) \lor S(y,c))] \\ \equiv_{sat} & (\forall y)[P(a_1) \land (\neg R(a_1,y) \lor S(y,c))] \\ \equiv & \{\{P(a_1)\}, \{\neg R(a_1,y), S(y,c)\}\} \end{array}$$

y una forma clausal de F_3

$$\begin{array}{ll} & (\exists x)(\forall y)[P(x) \land \neg(R(x,y) \land \neg S(y,c))] \\ \equiv & (\exists x)(\forall y)[P(x) \land (\neg R(x,y) \lor \neg\neg S(y,c))] \\ \equiv & (\exists x)(\forall y)[P(x) \land (\neg R(x,y) \lor S(y,c))] \\ \equiv_{sat} & (\forall y)[P(a_1) \land (\neg R(a_1,y) \lor S(y,c))] \\ \equiv & \{\{P(a_1)\}, \{\neg R(a_1,y), S(y,c)\}\} \end{array}$$

Puesto que

$$\{\{P(a_1)\}, \{\neg R(a_1,y), S(y,c)\}\} = \{\{P(a_1)\}, \{\neg R(a_1,y), S(y,c)\}\}$$

las fórmulas F_1 y F_3 son equivalentes.

Solución del apartado 3: Para la formalización ampliamos el vocabulario del apartado 1 introduciendo la constante a para representar a Alvaro y la constante b para representar a Benito.

La formalización del enunciado E_3 es

$$S(a,c) \wedge \neg R(b,a)$$

y su forma clausal es

$$\{\{S(a,c)\}, \{\neg R(b,a)\}\}$$

Para demostrar E_4 por resolución consideramos la formalización de su negación

$$\neg\neg P(b)$$

y calculamos su forma clausal

$$\{\{P(b)\}\}$$

Para demostrar mediante resolución, que E_4 es consecuencia de E_2 y E_3, basta demostrar que el conjunto formado por las formas clausales de E_2, E_3 y la negación de E_4 es inconsistente. Una demostración por resolución lineal es

1	$\{\neg P(x), \neg S(y,c), R(x,y)\}$	Hipótesis E_2
2	$\{S(a,c)\}$	Hipótesis E_3
3	$\{\neg R(b,a)\}$	Hipótesis E_3
4	$\{P(b)\}$	Negación de E_4
5	$\{\neg P(b), \neg S(a,c)\}$	Resolvente de 3 y 1 con $\sigma = \{x/b, y/a\}$
6	$\{\neg S(a,c)\}$	Resolvente de 5 y 4
7	$\square$	Resolvente de 6 y 2

Ejercicio 74 *Se considera el siguiente argumento:*

Todo deprimido que estima a un submarinista es listo.
Cualquiera que se estime a sí mismo es listo.
Ningún deprimido se estima a sí mismo.
Por tanto, ningún deprimido estima a un submarinista.

Decidir, utilizando el método de resolución, si el argumento es válido. Si no es válido encontrar una interpretación en la que las premisas sean todas verdaderas y la conclusión sea falsa. *(*NOTA: *En la formalización, usar el siguiente vocabulario $D(x)$ significa que x está deprimido, $S(x)$ significa que x es submarinista, $L(x)$ significa que x es listo y $E(x,y)$ significa que x estima a y.)*

Solución:

La formalización de *Todo deprimido que estima a un submarinista es listo* es

$$(\forall x)[D(x) \wedge (\exists y)[S(y) \wedge E(x,y)] \rightarrow L(x)]$$

El cálculo de su forma clausal es

$$\begin{array}{rl}
& (\forall x)[D(x) \land (\exists y)[S(y) \land E(x,y)] \to L(x)] \\
\equiv & (\forall x)[\neg(D(x) \land (\exists y)[S(y) \land E(x,y)]) \lor L(x)] \\
\equiv & (\forall x)[(\neg D(x) \lor \neg(\exists y)[S(y) \land E(x,y)]) \lor L(x)] \\
\equiv & (\forall x)[(\neg D(x) \lor (\forall y)\neg(S(y) \land E(x,y))) \lor L(x)] \\
\equiv & (\forall x)[(\neg D(x) \lor (\forall y)(\neg S(y) \lor \neg E(x,y))) \lor L(x)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[(\neg D(x) \lor (\neg S(y) \lor \neg E(x,y))) \lor L(x)] \\
\equiv & \{\{\neg D(x), \neg S(y), \neg E(x,y), L(x)\}\}
\end{array}$$

La formalización de *Cualquiera que se estime a sí mismo es listo* es

$$(\forall x)[E(x,x) \to L(x)]$$

El cálculo de su forma clausal es

$$\begin{array}{rl}
& (\forall x)[E(x,x) \to L(x)] \\
\equiv & (\forall x)[\neg E(x,x) \lor L(x)] \\
\equiv & \{\{\neg E(x,x), L(x)\}\}
\end{array}$$

La formalización de *Ningún deprimido se estima a sí mismo* es

$$\neg(\exists x)[D(x) \land E(x,x)]$$

El cálculo de su forma clausal es

$$\begin{array}{rl}
& \neg(\exists x)[D(x) \land E(x,x)] \\
\equiv & (\forall x)\neg(D(x) \land E(x,x)) \\
\equiv & (\forall x)[\neg D(x) \lor \neg E(x,x)] \\
\equiv & \{\{\neg D(x), \neg E(x,x)\}\}
\end{array}$$

La formalización de *Ningún deprimido estima a un submarinista* es

$$\neg(\exists x)(\exists y)[D(x) \land S(y) \land E(x,y)]$$

El cálculo de la forma clausal de su negación es

$$\begin{array}{rl}
& \neg\neg(\exists x)(\exists y)[D(x) \land S(y) \land E(x,y)] \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)[D(x) \land S(y) \land E(x,y)] \\
\equiv_{sat} & D(a) \land S(b) \land E(a,b) \\
\equiv & \{\{D(a)\}, \{S(b)\}, \{E(a,b)\}\}
\end{array}$$

El argumento es válido syss el conjunto formado por las cláusulas anteriores es inconsistente. Lo haremos por resolución. En principio, las cláusulas usables son

$$\begin{array}{rl}
1 & \{\neg D(x), \neg S(y), \neg E(x,y), L(x)\} \\
2 & \{\neg E(x,x), L(x)\} \\
3 & \{\neg D(x), \neg E(x,x)\} \\
4 & \{D(a)\} \\
5 & \{S(b)\} \\
6 & \{E(a,b)\}
\end{array}$$

y no hay ninguna cláusula usada.

En el paso 1 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 4, y al hacer resolución con las usadas no se obtiene ninguna resolvente. Las usables son la 1, 2, 3, 5 y 6. La usada es la 4.

En el paso 2 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 5, y al hacer resolución con las usadas no se obtiene ninguna resolvente. Las usables son la 1, 2, 3 y 6. Las usadas son la 4 y 5.

En el paso 3 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 6, y al hacer resolución con las usadas no se obtiene ninguna resolvente. Las usables son la 1, 2 y 3. Las usadas son la 4, 5 y 6.

En el paso 4 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 2, y al hacer resolución con las usadas no se obtiene ninguna resolvente. Las usables son la 1 y 3. Las usadas son la 2, 4, 5 y 6.

En el paso 5 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 3, y al hacer resolución con las usadas se obtiene la resolvente

7 $\{\neg E(a,a)\}$ Resolvente de 3 y 4 con $\sigma = \{x/a\}$

Las usables son la 1 y 7. Las usadas son la 2, 3, 4, 5 y 6.

En el paso 6 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 7, y al hacer resolución con las usadas no se obtiene ninguna resolvente. Las usables son la 1. Las usadas son la 2, 4, 5, 6 y 7.

En el paso 7 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 1, y al hacer resolución con las usadas se obtienen las resolventes

8 $\{\neg S(y), \neg E(a,y), L(a)\}$ Resolvente de 1 y 4 con $\sigma = \{x/a\}$
9 $\{\neg D(x), \neg E(x,b), L(x)\}$ Resolvente de 1 y 5 con $\sigma = \{y/b\}$
10 $\{\neg D(a), \neg S(b), L(a)\}$ Resolvente de 1 y 6 con $\sigma = \{x/a, y/b\}$

Las usables son la 8, 9 y 10. Las usadas son la 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

En el paso 8 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 10, y al hacer resolución con las usadas se obtienen las resolventes

11 $\{\neg S(b), L(a)\}$ Resolvente de 10 y 4
12 $\{\neg D(a), L(a)\}$ Resolvente de 10 y 5

La cláusula 11 subsume a la 10. Las usables son la 8, 9, 11 y 12. Las usadas son la 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

En el paso 9 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 11, y al hacer resolución con las usadas se obtienen la resolvente

13 $\{L(a)\}$ Resolvente de 11 y 5

La cláusula 13 subsume a la 8, 11 y 12. Las usables son la 9 y 13. Las usadas son la 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

En el paso 10 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 13, y al hacer resolución con las usadas no se obtienen resolventes. Las usable es la 9. Las usadas son la 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 13.

En el paso 11 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 9, y al hacer resolución con las usadas no se obtienen resolventes. No queda niguna usable. Las usadas son la 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 y 13.

Al haber agotado el conjunto de cláusulas usables sin encontrar la cláusula vacía, el conjunto es consistente y el argumento no es válido. A partir de las cláusulas usadas

1 $\{\neg D(x), \neg S(y), \neg E(x,y), L(x)\}$
2 $\{\neg E(x,x), L(x)\}$
3 $\{\neg D(x), \neg E(x,x)\}$
4 $\{D(a)\}$
5 $\{S(b)\}$
6 $\{E(a,b)\}$
7 $\{\neg E(a,a)\}$
9 $\{\neg D(x), \neg E(x,b), L(x)\}$
13 $\{L(a)\}$

Se construye una interpretación en la que las premisas sean todas verdaderas y la conclusión sea falsa; en efecto, la interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$ con dominio $U = \{a, b\}$ y $D^I = \{a\}$, $S^I = \{b\}$, $L^I = \{a\}$ y $E^I = \{(a, b)\}$ cumple las condiciones exigidas.

Curso 2005–06

Examen de Abril de 2006 (primer parcial)

Examen de Abril de 2006 (primer parcial del Grupo 1)

Ejercicio 75 *Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula*

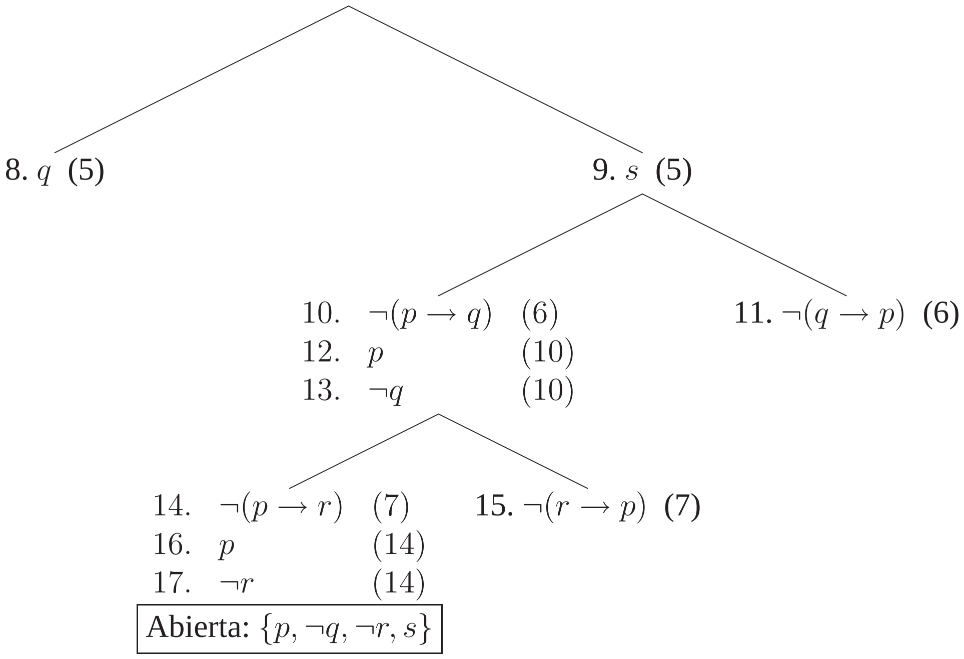
$$p \wedge (q \vee s) \rightarrow (p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r)$$

es una tautología, En el caso de que no lo sea, construir un contramodelo a partir del tablero.

Solución:

Para decidir si $p \wedge (q \vee s) \rightarrow (p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r)$ es una tautología, vamos a intentar construir un tablero completo cerrado de su negación.

1. $\neg(p \wedge (q \vee s) \rightarrow (p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r))$
2. $p \wedge (q \vee s)$ (1)
3. $\neg((p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r))$ (1)
4. p (2)
5. $q \vee s$ (2)
6. $\neg(p \leftrightarrow q)$ (3)
7. $\neg(p \leftrightarrow r)$ (3)



Al tener una rama completa abierta, la fórmula original no es una tautología y un contramodelo de ella es la interpretación v tal que $v(p) = 1$, $v(q) = 0$, $v(r) = 0$ y $v(s) = 1$.

Ejercicio 76 *Decidir, mediante resolución, si*

$$\{C \rightarrow A, G \rightarrow D, \neg(B \wedge C \wedge G \rightarrow E)\} \models A \wedge B \wedge D.$$

En el caso que no lo sea, construir un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar, calculamos las formas clausales de las hipótesis y de la negación de la conclusión.

$$\begin{aligned} C \to A &\equiv \neg C \lor A \\ &\equiv \{\{\neg C, A\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G \to D &\equiv \neg G \lor D \\ &\equiv \{\{\neg G, D\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg(B \land C \land G \to E) &\equiv \neg(\neg(B \land C \land G) \lor E) \\ &\equiv \neg\neg(B \land C \land G) \land \neg E \\ &\equiv B \land C \land G \land \neg E \\ &\equiv \{\{B\}, \{C\}, \{G\}, \{\neg E\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg(A \land B \land D) &\equiv \neg A \lor \neg B \lor \neg D \\ &\equiv \{\{\neg A, \neg B, \neg D\}\} \end{aligned}$$

Una refutación por resolución del conjunto de las cláusulas obtenidas es

1.	$\{\neg C, A\}$	
2.	$\{\neg G, D\}$	
3.	$\{B\}$	
4.	$\{C\}$	
5.	$\{G\}$	
6.	$\{\neg E\}$	
7.	$\{\neg A, \neg B, \neg D\}$	
8.	$\{A\}$	Resolvente de 1 y 4
9.	$\{D\}$	Resolvente de 2 y 5
10.	$\{\neg B, \neg D\}$	Resolvente de 7 y 8
11.	$\{\neg D\}$	Resolvente de 3 y 10
12.	$\square$	Resolvente de 9 y 11

Por tanto, el conjunto de cláusulas es inconsistente y se verifica la relación de consecuencia.

Ejercicio 77 *Juan está matriculado en tres asignaturas, Álgebra, Lógica y Dibujo. Juan comenta que*

> Me gusta al menos una de las tres asignaturas. Si me gustase el Álgebra pero no el Dibujo, me gustaría la Lógica. O me gusta el Dibujo y la Lógica, o bien ninguna de las dos. Si me gustase el Dibujo, entonces me gustaría el Álgebra.

Los comentarios de Juan pueden formalizarse por

$$\{A \lor D \lor L, (A \land \neg D) \to L, (D \land L) \lor (\neg D \land \neg L), D \to A\}$$

Decidir, mediante resolución, si los comentarios de Juan son consistentes y, en su caso, calcular *sus modelos a partir de la resolución. ¿Qué asignaturas le gustan a Juan?*

Solución:

En primer lugar, calculamos las formas clausales de los comentarios.

$$
\begin{aligned}
A \lor D \lor L &\equiv \{\{A, D, L\}\} \\
(A \land \neg D) \to L &\equiv \neg(A \land \neg D) \lor L \\
&\equiv (\neg A \lor \neg\neg D) \lor L \\
&\equiv (\neg A \lor D) \lor L \\
&\equiv \{\{\neg A, D, L\}\} \\
(D \land L) \lor (\neg D \land \neg L) &\equiv (D \lor (\neg D \land \neg L)) \land (L \lor (\neg D \land \neg L)) \\
&\equiv ((D \lor \neg D) \land (D \lor \neg L)) \land ((L \lor \neg D) \land (L \lor \neg L)) \\
&\equiv (D \lor \neg L) \land (L \lor \neg D) \\
&\equiv \{\{D, \neg L\}, \{L, \neg D\}\} \\
D \to A &\equiv \neg D \lor A \\
&\equiv \{\{\neg D, A\}\}
\end{aligned}
$$

Vamos a demostrar que el conjunto de cláusulas obtenidas no es refutable por resolución.

$*$	1.	$\{A, D, L\}$	
$*$	2.	$\{\neg A, D, L\}$	
$*$	3.	$\{D, \neg L\}$	
$*$	4.	$\{L, \neg D\}$	
$*$	5.	$\{\neg D, A\}$	
$*$	6.	$\{D, L\}$	Resolvente de 1 y 2. Subsume a 1 y 2.
	7.	$\{L\}$	Resolvente de 6 y 3. Subsume a 6 y 3.
	8.	$\{D\}$	Resolvente de 7 y 4. Subsume a 4.
	9.	$\{A\}$	Resolvente de 8 y 5. Subsume a 5.

En este momento, las únicas cláusulas no subsumidas son la 7, 8 y 9 con las que no se pueden formar ninguna resolvente. Por tanto, el conjunto de cláusulas es consistente, los comentarios de Juan son consistentes, un modelo es la interpretación v tal que $v(A) = 1$, $v(D) = 1$ y $v(L) = 1$ y a Juan le gustan las tres asignaturas.

Ejercicio 78 *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Existe un conjunto de fórmulas S y una fórmula F tal que $S \models F$ y $S \models \neg F$.*
2. *Existe un conjunto de fórmulas S y una fórmula F tal que $S \not\models F$ y $S \not\models \neg F$.*

Solución:

Solución del apartado 1: La proposición es cierta. Sean $S = \{p \land \neg p\}$ y F la fórmula p. Entonces

- $S \models F$ (ya que $\{p \land \neg p\} \models p$) y

- $S \models \neg F$ (ya que $\{p \wedge \neg p\} \models \neg p$).

Solución del apartado 2: La proposición es cierta. Sean $S = \{p\}$ y F la fórmula q. Entonces

- $S \not\models F$ (ya que $\{p\} \not\models q$ puesto que la interpretación I_1 tal que $I_1(p) = 1$ y $I_1(q) = 0$ es un contramodelo) y
- $S \not\models \neg F$ (ya que $\{p\} \not\models \neg q$ puesto que la interpretación I_2 tal que $I_2(p) = 1$ y $I_2(q) = 1$ es un contramodelo).

Examen de Abril de 2006 (laboratorio de los Grupos 1A y 1B)

Ejercicio 79 *Demostrar por deducción natural con Jape*

1. $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \vdash p \vee r$.
2. $\vdash (\neg p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$.

Examen de Abril de 2006 (laboratorio del Grupo 1C)

Ejercicio 80 *Demostrar por deducción natural con Jape*

1. $\neg(\neg q \land p) \vdash p \rightarrow q$.
2. $\neg p \lor (r \rightarrow q) \vdash \neg q \rightarrow \neg(p \land r)$.

Examen de Abril de 2006 (primer parcial del Grupo 2)

Ejercicio 81 *Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula*

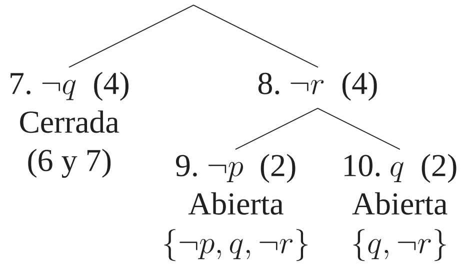
$$(p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)$$

es una tautología, En el caso de que no lo sea, calcular a partir de un tablero completo sus contramodelos y una forma normal disyuntiva.

Solución:

Para calcular los contramodelos de $(p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)$ vamos a construir un tablero completo de su negación.

$$\begin{array}{lll}
1. & \neg((p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)) & \\
2. & p \to q & (1) \\
3. & \neg((q \to \neg r) \to \neg q) & (1) \\
4. & q \to \neg r & (3) \\
5. & \neg\neg q & (3) \\
6. & q & (5)
\end{array}$$



Al tener ramas abiertas, la fórmula original no es una tautología y sus contramodelos son:

- I_1 tal que $I_1(p) = 0$, $I_1(q) = 1$ y $I_1(r) = 0$,
- I_2 tal que $I_2(q) = 1$ y $I_2(r) = 0$,

El segundo incluye al primero.

Sea F la fórmula dada (es decir, $(p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)$). Una forma normal disyuntiva de $\neg F$ es $q \wedge \neg r$. Por tanto, $\neg F \equiv q \wedge \neg r$ de donde se sigue que $F \equiv \neg q \vee r$. Luego, una forma normal disyuntiva de F es $\neg q \vee r$.

Ejercicio 82 *Decidir, mediante resolución, si*

$$\{p \to q, \neg p \to r, q \vee r \to s\} \models s.$$

En el caso que no lo sea, construir un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar, calculamos las formas clausales de las hipótesis y de la negación de la conclusión.

$$\begin{aligned} p \to q &\equiv \neg p \vee q \\ &\equiv \{\{\neg p, q\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg p \to r &\equiv \neg\neg p \lor r \\ &\equiv p \lor r \\ &\equiv \{\{p, r\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q \lor r \to s &\equiv \neg(q \lor r) \lor s \\ &\equiv (\neg q \land \neg r) \lor s \\ &\equiv (\neg q \lor s) \land (\neg r \lor s) \\ &\equiv \{\{\neg q, s\}, \{\neg r, s\}\} \end{aligned}$$

$$\neg s \equiv \{\{\neg s\}\}$$

Una refutación por resolución del conjunto de las cláusulas obtenidas es

1. $\{\neg p, q\}$
2. $\{p, r\}$
3. $\{\neg q, s\}$
4. $\{\neg r, s\}$
5. $\{\neg s\}$
6. $\{\neg q\}$ Resolvente de 3 y 5
7. $\{\neg r\}$ Resolvente de 4 y 5
8. $\{\neg p\}$ Resolvente de 1 y 6
9. $\{r\}$ Resolvente de 2 y 8
10. $\square$ Resolvente de 7 y 9

Por tanto, el conjunto de cláusulas es inconsistente y se verifica la relación de consecuencia.

Ejercicio 83 *Decidir, mediante resolución, si* r *es consecuencia lógica de*

$$\{p \leftrightarrow q, \neg p \to r, \neg s \land \neg t \to q, \neg s \land t\}.$$

En el caso que no lo sea, construir un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar, calculamos las formas clausales de las hipótesis y de la negación de la conclusión.

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\equiv (p \to q) \land (q \to p) \\ &\equiv (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p) \\ &\equiv \{\{\neg p, q\}, \{\neg q, p\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg p \to r &\equiv \neg\neg p \lor r \\ &\equiv p \lor r \\ &\equiv \{\{p, r\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg s \land \neg t \to q &\equiv \neg(\neg s \land \neg t) \lor q \\ &\equiv (\neg\neg s \lor \neg\neg t) \lor q \\ &\equiv (s \lor t) \lor q \\ &\equiv \{\{q, s, t\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg s \land t &\equiv \{\{\neg s\},\{t\}\} \\ \neg r &\equiv \{\{\neg r\}\} \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que el conjunto de cláusulas obtenidas no es refutable por resolución.

$*$	1.	$\{\neg p, q\}$	
$*$	2.	$\{\neg q, p\}$	
$*$	3.	$\{p, r\}$	
$*$	4.	$\{q, s, t\}$	
	5.	$\{\neg s\}$	
	6.	$\{t\}$	Subsume a 4.
	7.	$\{\neg r\}$	
	8.	$\{p\}$	Resolvente de 3 y 7. Subsume a 2 y 3.
	9.	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 8. Subsume a 1.

En este momento, las únicas cláusulas no subsumidas son la 5, 6, 7, 8 y 9 con las que no se pueden formar ninguna resolvente. Por tanto, el conjunto de cláusulas es consistente, la relación de consecuencia no se verifica y un contramodelo es la interpretación I tal que $I(p) = 1$, $I(q) = 1$, $I(r) = 0$, $I(s) = 0$ y $I(t) = 1$.

Ejercicio 84 *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Si S_1 y S_2 son dos conjuntos consistentes de fórmulas, entonces $S_1 \cup S_2$ es consistente.*
2. *Si S_1 y S_2 son dos conjuntos inconsistentes de fórmulas, entonces $S_1 \cap S_2$ es inconsistente.*

Solución:

Solución del apartado 1: La proposición es falsa. Sean $S_1 = \{p\}$ y $S_2 = \{\neg p\}$. Entonces

- S_1 es consistente (ya que la interpretación I_1 con $I_1(p) = 1$ es un modelo de S_1).
- S_2 es consistente (ya que la interpretación I_2 con $I_2(p) = 0$ es un modelo de S_2).
- $S_1 \cup S_2 = \{p, \neg p\}$ es inconsistente.

Solución del apartado 2: La proposición es falsa. Sean $S_1 = \{p, \neg p, q\}$ y $S_2 = \{q, \neg q, r\}$. Entonces

- S_1 es inconsistente (ya que contiene a p y $\neg p$).
- S_2 es inconsistente (ya que contiene a q y $\neg q$).
- $S_1 \cap S_2 = \{q\}$ es consistente (ya que la interpretación I con $I(q) = 1$ es un modelo de $S_1 \cap S_2$).

Examen de Abril de 2006 (laboratorio de los Grupos 2A y 2B)

Ejercicio 85 *Demostrar por deducción natural con Jape*

1. $\neg(p \land q) \vdash p \rightarrow \neg q$.
2. $(p \lor \neg q) \rightarrow p \land r \vdash \neg q \lor (\neg p \lor r)$.

Examen de Abril de 2006 (laboratorio de los Grupos 2C y 2D)

Ejercicio 86 *Demostrar por deducción natural con Jape*

1. $(p \to q) \land ((\neg r \lor q) \to s) \vdash \neg(p \land \neg s)$.
2. $\vdash (\neg(s \lor (p \to q))) \to (p \land \neg q \land \neg s)$.

Examen de Junio de 2006 (segundo parcial)

Examen de Junio de 2006 (segundo parcial del Grupo 1)

Ejercicio 87 *Decidir, mediante resolución, si*

$$\models (\exists x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \to (\forall x)(\forall y)[Q(y) \to P(x,y)]]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar se calcula una forma clausal de la negación de la fórmula.

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \to (\forall x)(\forall y)[Q(y) \to P(x,y)]] \\
\equiv & \neg(\exists x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \to (\forall u)(\forall v)[Q(v) \to P(u,v)]] \\
\equiv & (\forall x)\neg[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \to (\forall u)(\forall v)[Q(v) \to P(u,v)]] \\
\equiv & (\forall x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \land \neg(\forall u)(\forall v)[Q(v) \to P(u,v)]] \\
\equiv & (\forall x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \land (\exists u)(\exists v)\neg[Q(v) \to P(u,v)]] \\
\equiv & (\forall x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \land (\exists u)(\exists v)[Q(v) \land \neg P(u,v)]] \\
\equiv & (\forall x)(\exists u)(\exists v)(\forall y)[(P(x,y) \lor \neg Q(y)) \land (Q(v) \land \neg P(u,v))] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[(P(x,y) \lor \neg Q(y)) \land (Q(g(x)) \land \neg P(f(x),g(x)))] \\
\equiv & \{\{P(x,y), \neg Q(y)\}, \{Q(g(x))\}, \{\neg P(f(x),g(x))\}\}
\end{array}$$

La demostración por resolución es

1	$\{P(x,y), \neg Q(y)\}$	
2	$\{Q(g(x))\}$	
3	$\{\neg P(f(x),g(x))\}$	
4	$\{P(x,g(z))\}$	Res. de 1 y 2$[x/z]$ con $\sigma = [y/g(z)]$
5	$\square$	Res. de 3$[x/u]$ y 4 con $\sigma = [x/f(u), z/u]$

Ejercicio 88 *Decidir, mediante tableros semánticos, si*

$$\{(\forall x)[(\exists y)[P(x,y) \lor P(y,x)] \to P(x,x)],\quad (\exists x)(\exists y)P(x,y)\} \models (\exists x)P(x,x)$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir del tablero.

Solución:

$$\begin{array}{rl}
1. & (\forall x)[(\exists y)[P(x,y) \lor P(y,x)] \to P(x,x)] \\
2. & (\exists x)(\exists y)P(x,y) \\
3. & \neg(\exists x)P(x,x) \\
4. & (\exists y)P(a,y) \quad (2) \\
5. & P(a,b) \quad (4) \\
6. & (\exists y)[P(a,y) \lor P(y,a)] \to P(a,a) \quad (1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
7. & \neg(\exists y)[P(a,y) \lor P(y,a)] \quad (6) \\
9. & \neg(P(a,b) \lor P(b,a)) \quad (7) \\
10. & \neg P(a,b) \quad (9) \\
11. & \neg P(b,a) \quad (9)
\end{array}$$

Cerrada (5–10)

$$\begin{array}{rl}
8. & P(a,a) \quad (6) \\
12. & \neg P(a,a) \quad (3)
\end{array}$$

Cerrada (8–12)

Como las ramas son cerradas, se tiene que

$$\{(\forall x)[(\exists y)[P(x,y) \lor P(y,x)] \to P(x,x)], \quad (\exists x)(\exists y)P(x,y)\} \models (\exists x)P(x,x)$$

Ejercicio 89 *Se considera el siguiente conjunto de fórmulas*

$$\begin{array}{rl}
T = \{ & (\forall y)P(0,y,y), \\
& (\forall x)(\forall y)(\forall z)[P(x,y,z) \to P(s(x),y,s(z))], \\
& Q(0), \\
& (\forall x)[Q(x) \to Q(s(s(x)))] \;\}
\end{array}$$

Demostrar por resolución lineal que

$$T \models (\exists x)(\exists y)[P(x,s(y),s(s(0))) \land Q(s(x))]$$

y, a partir de la demostración encontrar todos los términos t_1 *y* t_2 *tales que*

$$T \models P(t_1,s(t_2),s(s(0))) \land Q(s(t_1))$$

Solución:

En primer lugar se calcula las formas clausales de las fórmulas de T:

$$\begin{array}{rl}
& (\forall y)P(0,y,y) \\
\equiv & \{\{P(0,y,y)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
& (\forall x)(\forall y)(\forall z)[P(x,y,z) \to P(s(x),y,s(z))] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\neg P(x,y,z) \lor P(s(x),y,s(z))] \\
\equiv & \{\{\neg P(x,y,z), P(s(x),y,s(z))\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
& Q(0) \\
\equiv & \{\{Q(0)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & (\forall x)[Q(x) \rightarrow Q(s(s(x)))] \\ \equiv & (\forall x)[\neg Q(x) \vee Q(s(s(x)))] \\ \equiv & \{\{\neg Q(x), Q(s(s(x)))\}\} \end{array}$$

y de la negación de la conclusión

$$\begin{array}{rl} & \neg(\exists x)(\exists y)[P(x, s(y), s(s(0))) \wedge Q(s(x))] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)\neg(P(x, s(y), s(s(0))) \wedge Q(s(x))) \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x, s(y), s(s(0))) \vee \neg Q(s(x))) \\ \equiv & \{\{\neg P(x, s(y), s(s(0))), \neg Q(s(x))\}\} \end{array}$$

La base de conocimiento es

$$\begin{array}{ll} C_1 & = \{\{P(0, y, y)\} \\ C_2 & = \{\neg P(x, y, z), P(s(x), y, s(z))\} \\ C_2 & = \{Q(0)\} \\ C_4 & = \{\neg Q(x), Q(s(s(x)))\} \end{array}$$

y el objetivo es

$$\{\neg P(x, s(y), s(s(0))), \neg Q(s(x))\}\}$$

El grafo de resolución se muestra en la figura 7 (página 134).

La solución correspondiente a la segunda rama es

$$\begin{array}{l} t_1 = x\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = s(x_1)\sigma_2\sigma_3 = s(0)\sigma_3 = s(0) \\ t_2 = y\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = y\sigma_2\sigma_3 = 0\sigma_3 = 0 \end{array}$$

Ejercicio 90 *Decidir, mediante resolución, si*

$$\models (\forall x)(\forall y)[R(x, y) \rightarrow (\exists z)[R(x, z) \wedge R(z, y)]]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar se calcula una forma clausal de la negación de la fórmula.

$$\begin{array}{rl} & \neg(\forall x)(\forall y)[R(x, y) \rightarrow (\exists z)[R(x, z) \wedge R(z, y)]] \\ \equiv & (\exists x)(\exists y)\neg(R(x, y) \rightarrow (\exists z)[R(x, z) \wedge R(z, y)]) \\ \equiv & (\exists x)(\exists y)[R(x, y) \wedge \neg(\exists z)[R(x, z) \wedge R(z, y)]] \\ \equiv & (\exists x)(\exists y)[R(x, y) \wedge (\forall z)\neg(R(x, z) \wedge R(z, y))] \\ \equiv & (\exists x)(\exists y)[R(x, y) \wedge (\forall z)[\neg R(x, z) \vee \neg R(z, y)]] \\ \equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[R(x, y) \wedge (\neg R(x, z) \vee \neg R(z, y))] \\ \equiv_{sat} & (\forall z)[R(a, b) \wedge (\neg R(a, z) \vee \neg R(z, b))] \\ \equiv & \{\{R(a, b)\}, \{\neg R(a, z), \neg R(z, b)\}\} \end{array}$$

La saturación por resolución es

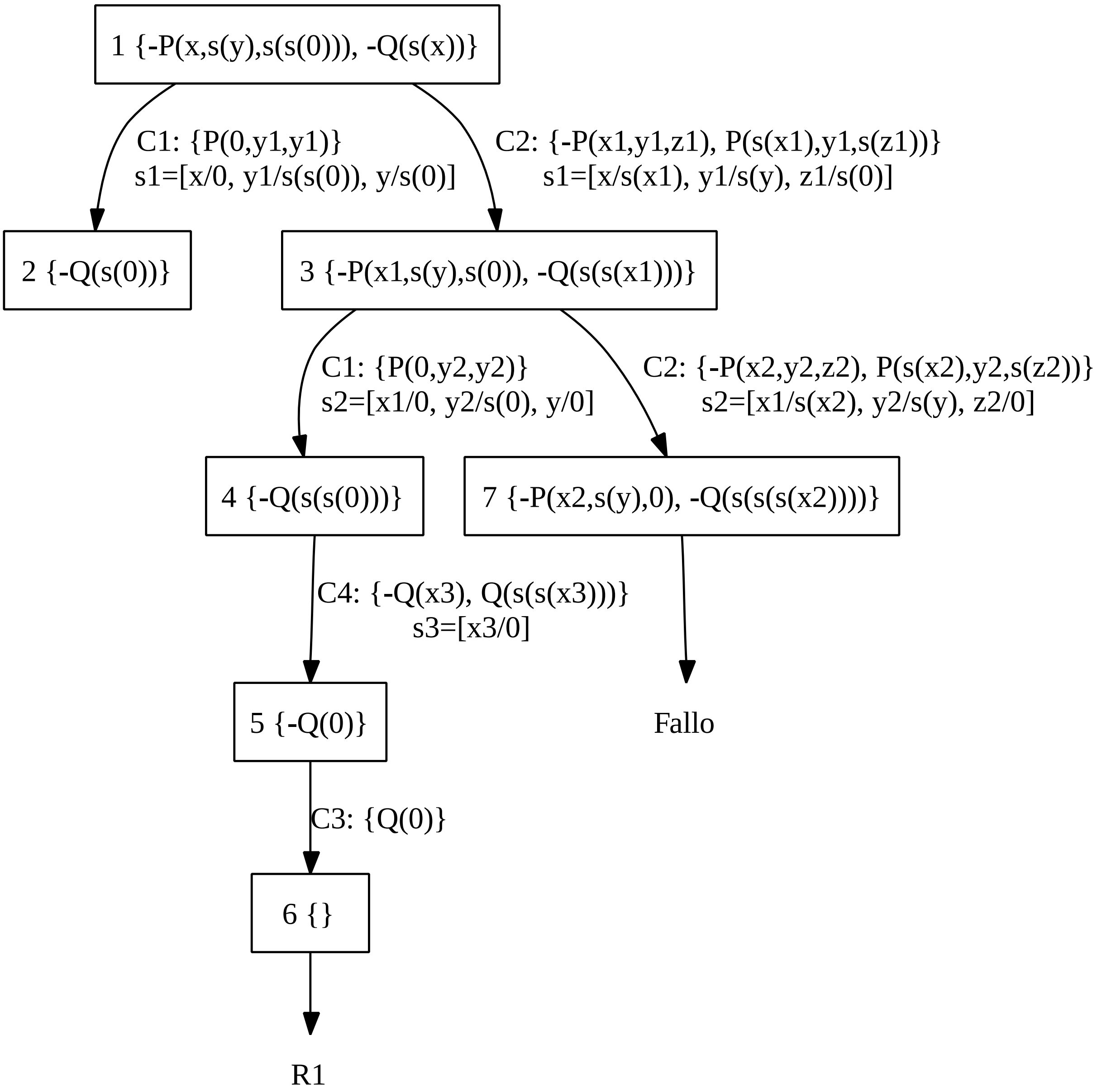


Figura 7: Grafo de resolución

$1 \quad \{R(a,b)\}$

$2 \quad \{\neg R(a,z), \neg R(z,b)\}$

$3 \quad \{\neg R(b,b)\}$ Res. de 1.1 y 2.1 con $\sigma = [z/b]$

$4 \quad \{\neg R(a,a)\}$ Res. de 1.1 y 2.2 con $\sigma = [z/a]$

Por tanto, el conjunto de cláusulas es consistente, la fórmula inicial no es válida y un contramodelo de Herbrand es (U, I) donde $U = \{a, b\}$, $I(R) = \{(a, b)\}$.

Examen de Junio de 2006 (laboratorio de los Grupos 1A y 1B)

Ejercicio 91 *Demostrar por deducción natural con Jape*

1. $\exists x.(p(x) \land q(x)), \forall y.(p(y) \rightarrow r(y)) \vdash \exists x.(r(x) \land q(x))$
2. $\forall x.r(x,x), \forall x.\forall y.\forall z.(\neg r(x,y) \land \neg r(y,z) \rightarrow \neg r(x,z)) \vdash \forall x.\forall y.(r(x,y) \lor r(y,x))$

Examen de Junio de 2006 (laboratorio del Grupo 1C)

Ejercicio 92 *Demostrar por deducción natural con Jape*

1. $\exists x.\exists y.(R(x,y) \lor R(y,x)) \vdash \exists x.\exists y.R(x,y)$
2. $\forall x.(p(x) \to \exists y.q(y)), actuali \vdash \forall x.\exists y.(p(x) \to q(y))$

Examen de Junio de 2005 (segundo parcial del Grupo 2)

Ejercicio 93 *Decidir, mediante resolución, si*

$$(\forall x)(\forall y)[(\forall z)[P(z,x) \rightarrow P(z,y)] \rightarrow Q(x,y)] \models (\forall x)Q(x,x)$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar calculamos la forma clausal de la hipótesis

$$\begin{array}{ll}
 & (\forall x)(\forall y)[(\forall z)[P(z,x) \rightarrow P(z,y)] \rightarrow Q(x,y)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg(\forall z)[P(z,x) \rightarrow P(z,y)] \vee Q(x,y)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[(\exists z)\neg(P(z,x) \rightarrow P(z,y)) \vee Q(x,y)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[(\exists z)[P(z,x) \wedge \neg P(z,y)] \vee Q(x,y)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\exists z)[(P(z,x) \wedge \neg P(z,y)) \vee Q(x,y)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\exists z)[(P(z,x) \vee Q(x,y)) \wedge (\neg P(z,y) \vee Q(x,y))] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[(P(f(x,y),x) \vee Q(x,y)) \wedge (\neg P(f(x,y),y) \vee Q(x,y))] \\
\equiv & \{\{P(f(x,y),x), Q(x,y)\}, \{\neg P(f(x,y),y), Q(x,y)\}\}
\end{array}$$

y de la negación de la conclusión

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\forall x)Q(x,x) \\
\equiv & (\exists x)\neg Q(x,x) \\
\equiv_{sat} & \neg Q(a,a) \\
\equiv & \{\{\neg Q(a,a)\}\}
\end{array}$$

La demostración por resolución es

1	$\{P(f(x,y),x), Q(x,y)\}$	
2	$\{\neg P(f(x,y),y), Q(x,y)\}$	
3	$\{\neg Q(a,a)\}$	
4	$\{P(f(a,a),a)\}$	Res. de 1 y 3 con $\sigma = [x/a, y/a]$
5	$\{\neg P(f(a,a),a)\}$	Res. de 2 y 3 con $\sigma = [x/a, y/a]$
6	$\square$	Res. de 4 y 5

Ejercicio 94 *Decidir, mediante tableros semánticos, si*

$$(\forall x)(\forall y)[(\forall z)[P(z,x) \rightarrow P(z,y)] \rightarrow Q(x,y)] \models (\forall x)Q(x,x)$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir del tablero.

Solución:

1. $(\forall x)(\forall y)[(\forall z)[P(z,x) \rightarrow P(z,y)] \rightarrow Q(x,y)]$
2. $\neg(\forall x)Q(x,x)$
3. $\neg Q(a,a)$ (2)
4. $(\forall y)[(\forall z)[P(z,a) \rightarrow P(z,y)] \rightarrow Q(a,y)]$ (1)
5. $(\forall z)[P(z,a) \rightarrow P(z,a)] \rightarrow Q(a,a)$ (4)

6. $\neg(\forall z)[P(z,a) \rightarrow P(z,a)]$ (5)
8. $\neg(P(b,a) \rightarrow P(b,a))$ (6)
9. $P(b,a)$ (8)
10. $\neg P(b,a)$ (8)

Cerrada (9–10)

7. $Q(a,a)$ (5)

Cerrada (7–3)

Como las ramas son cerradas, se tiene que

$$(\forall x)(\forall y)[(\forall z)[P(z,x) \rightarrow P(z,y)] \rightarrow Q(x,y)] \models (\forall x)Q(x,x)$$

Ejercicio 95 *Se considera el siguiente conjunto de fórmulas*

$$\begin{aligned} T = \{ \; & (\forall x)(\forall z)R(x,p(x,z)), \\ & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[R(x,z) \rightarrow R(x,p(y,z))]\} \end{aligned}$$

Demostrar por resolución lineal que

$$T \models (\exists x)R(x,p(a,p(b,nil)))$$

y, a partir de la demostración encontrar todos los términos t tales que

$$T \models R(t,p(a,p(b,nil)))$$

Solución:

En primer lugar se calcula las formas clausales de las fórmulas de T:

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\forall z)R(x,p(x,z)) \\ \equiv \; & \{\{R(x,p(x,z))\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[R(x,z) \rightarrow R(x,p(y,z))] \\ \equiv \; & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\neg R(x,z) \vee R(x,p(y,z))] \\ \equiv \; & \{\{\neg R(x,z), R(x,p(y,z))\}\} \end{aligned}$$

y de la negación de la conclusión

$$\begin{aligned} & \neg(\exists x)R(x,p(a,p(b,nil))) \\ \equiv \; & (\forall x)\neg R(x,p(a,p(b,nil))) \\ \equiv \; & \{\{\neg R(x,p(a,p(b,nil)))\}\} \end{aligned}$$

La base de conocimiento es

$$\begin{aligned} C_1 &= \{R(x, p(x, z))\} \\ C_2 &= \{\neg R(x, z), R(x, p(y, z))\} \end{aligned}$$

y el objetivo es

$$\{\neg R(x, p(a, p(b, nil)))\}$$

El grafo de resolución se muestra en la figura 8 (página 140). Las soluciones correspondientes a las dos primeras ramas son

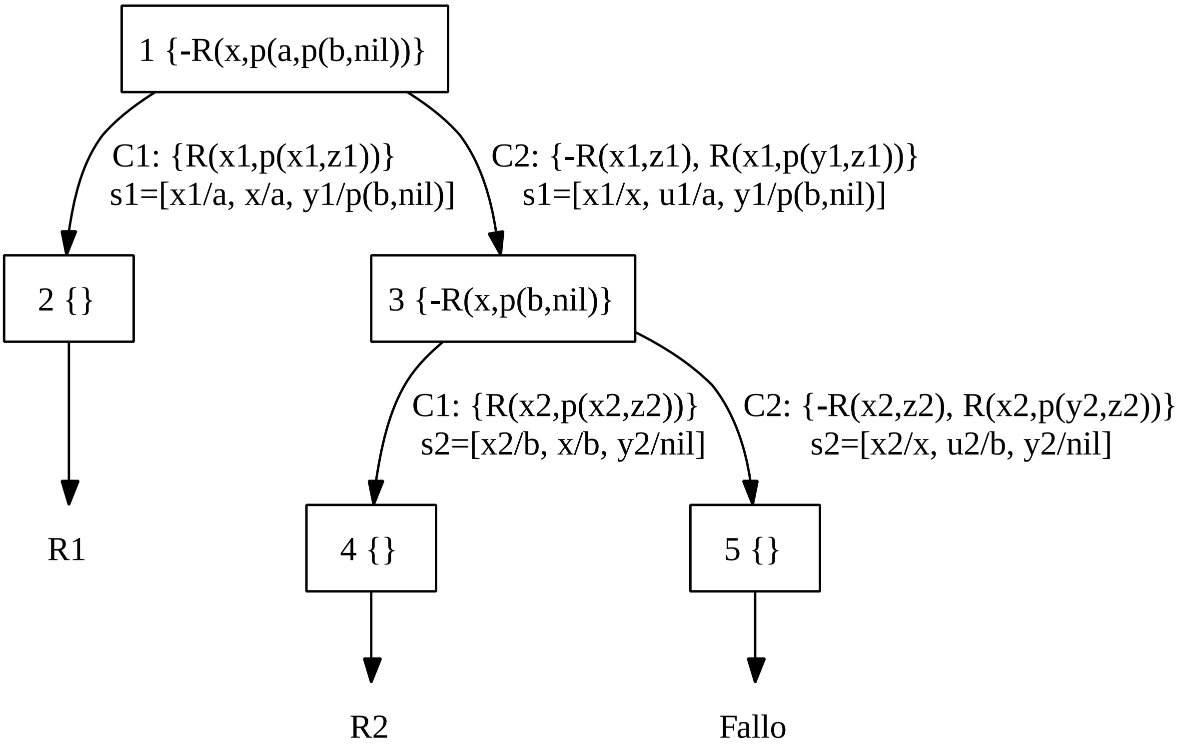


Figura 8: Grafo de resolución

$$\begin{aligned} &t = x\sigma_1 = a \\ &t = x\sigma_1\sigma_2 = x\sigma_2 = b \end{aligned}$$

Ejercicio 96 *Decidir, mediante resolución, si*

$$\models (\exists x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar calculamos la forma clausal de la negación de la fórmmula.

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg((\exists x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))) \\
\equiv & \neg((\exists x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow ((\exists y)P(y) \rightarrow (\exists z)Q(z))) \\
\equiv & (\exists x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \neg((\exists y)P(y) \rightarrow (\exists z)Q(z)) \\
\equiv & (\exists x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge ((\exists y)P(y) \wedge \neg(\exists z)Q(z)) \\
\equiv & (\exists x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge ((\exists y)P(y) \wedge (\forall z)\neg Q(z)) \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (P(y) \wedge \neg Q(z))] \\
\equiv_{sat} & (\forall z)[(\neg P(a) \vee Q(a)) \wedge (P(b) \wedge \neg Q(z))] \\
\equiv & \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{P(b)\}, \{\neg Q(z)\}\}
\end{array}
$$

Las cláusulas obtenidas son

$$
\begin{array}{ll}
C_1: & \{\neg P(a), Q(a)\} \\
C_2: & \{P(b)\} \\
C_3: & \{\neg Q(z)\}
\end{array}
$$

Al saturar por resolución la única cláusula que se obtiene es

$$C_4: \{\neg P(a)\}$$

que es la resolvente de C_1 y C_3 con el unificador $[z/a]$. Por tanto, el conjunto de cláusulas es consistente, la fórmula inicial no es válida y un contramodelo de Herbrand es (U, I) donde $U = \{a, b\}$, $I(P) = \{b\}$ e $I(Q) = \emptyset$.

Examen de Junio de 2006 (laboratorio de los Grupos 2A y 2B)

Ejercicio 97 *Demostrar por deducción natural con Jape*

1. $\forall x.\exists y.(p(x) \rightarrow q(y)) \vdash \forall x.(p(x) \rightarrow \exists y.q(y))$
2. $\neg\forall x.(p(x) \rightarrow q(a)) \vdash \exists x.p(x) \land \neg q(a)$

Examen de Junio de 2006 (laboratorio de los Grupos 2C y 2D)

Ejercicio 98 *Demostrar por deducción natural con Jape*

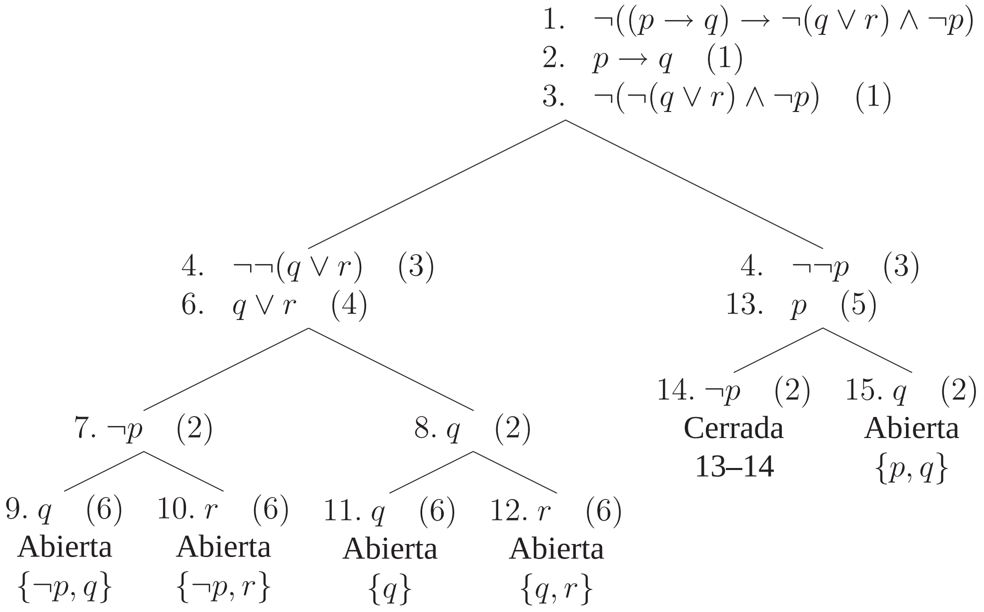
1. $\forall x.p(x), \forall x.(p(x) \rightarrow q(x) \vee r(x)), \exists x.\neg q(x) \vdash \exists x.r(x)$
2. $\forall x.\forall y.(r(x,y) \rightarrow r(y,x)), \forall x.\forall y.(r(x,y) \vee r(y,x))$
   $\vdash \forall x.\forall y.\forall z.(\neg r(x,y) \wedge \neg r(y,z) \rightarrow \neg r(x,z))$

Examen de Junio de 2006

Ejercicio 99 *Sea F la fórmula $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \vee r) \wedge \neg p$.*

1. *Decidir, mediante tablero semántico, si F es una tautología.*
2. *Si F no es una tautología, calcular, a partir de su tablero semántico, los contramodelos de F, una forma normal disyuntiva de $\neg F$ y una forma normal conjuntiva de F.*

Solución:
Apartado 1: Decidiremos la validez de F construyendo el tablero semántico de $\neg F$.



Puesto que el tablero de $\neg F$ tiene ramas abiertas, la fórmula $\neg F$ tiene modelos y, por tanto, F no es una tautología.

Nótese que para decidir que F no es una tautología bastaba desarrollar hasta encontrar la primera rama abierta. Hemos desarrollado el tablero completo para encontrar los contramodelos de F que se piden en el siguiente apartado.
Apartado 2: Los contramodelos de F son los modelos de $\neg F$ y se obtienen a partir de las ramas abiertas del tablero de $\neg F$. Los contramodelos son

	p	q	r
I_1	0	1	–
I_2	0	–	1
I_3	–	1	–
I_4	–	1	1
I_5	1	1	–

Puesto que I_3 está contenido en I_1, I_4 y I_5, los contramodelos se reducen I_2 y I_3. Por tanto,

$$\neg F \equiv (\neg p \wedge r) \vee q$$

y una forma normal disyuntiva de $\neg F$ es

$$(\neg p \wedge r) \vee q$$

Además,

$$\begin{aligned} F &\equiv \neg\neg F \\ &\equiv \neg((\neg p \wedge r) \vee q) \\ &\equiv \neg(\neg p \wedge r) \wedge \neg q \\ &\equiv (\neg\neg p \vee \neg r) \wedge \neg q \\ &\equiv (p \vee \neg r) \wedge \neg q \end{aligned}$$

y una forma normal conjuntiva de F es

$$(p \vee \neg r) \wedge \neg q.$$

Ejercicio 100 *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Si $\{F \to G,\ F\}$ es consistente, entonces $\{G\}$ es consistente.*
2. *Si S es un conjunto inconsistente de fórmulas, entonces el tablero semántico cerrado de S obtenido aplicando las reglas α antes que las reglas β tiene menos nodos que el tablero semántico cerrado de S obtenido aplicando las reglas β antes que las reglas α.*

Solución:

Apartado 1: La proposición es cierta. En efecto, supongamos que $\{F \to G,\ F\}$ es consistente, entonces existe un modelo v del conjunto. Por tanto, $v(F \to G) = 1$ y $v(F) = 1$. Por la definición del valor de verdad del condicional, $v(G) = 1$. Por consiguiente, $\{G\}$ es consistente.

Apartado 2: La proposición es falsa. Como contraejemplo consideremos el conjunto

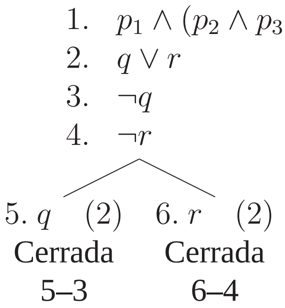
$$S = \{p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3), q \vee r, \neg q, \neg r\}.$$

El tablero semántico cerrado de S obtenido aplicando las reglas α antes que las reglas β es

1. $p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)$
2. $q \vee r$
3. $\neg q$
4. $\neg r$
5. p_1 (1)
6. $p_2 \wedge p_3$ (1)
7. p_2 (6)
8. p_3 (6)

9. q (2)	10. r (2)
Cerrada	Cerrada
9–3	10–4

y el tablero semántico cerrado de S obtenido aplicando las reglas β antes que las reglas α es



El número de nodos del primer tablero es mayor que el número de nodos del segundo tablero.

Ejercicio 101 *Se consideran las siguientes fórmulas:*

$$\begin{aligned}
F_1 &= (\forall x)(\exists x_1)(\forall y)(\exists y_1)(\forall z)(\exists z_1)P(x,x_1,y,y_1,z,z_1)\\
F_2 &= (\exists x)(\forall x_1)(\exists y)(\forall y_1)(\exists z)(\exists u)P(z,x,x_1,y,y_1,u)\\
F_3 &= (\exists x)(\forall x_1)(\exists y)(\exists y_1)(\forall z)(\exists z_1)P(x,x_1,y,y_1,z,z_1)
\end{aligned}$$

Decidir, por resolución, las siguientes relaciones. Para las que no se verifiquen, dar un contramodelo.

1. $F_1 \models F_2$
2. $F_3 \models F_2$

Solución:

Apartado 1: Decidir $F_1 \models F_2$ se reduce a decidir si $\{F_1, \neg F_2\}$ es inconsistente. Lo haremos por resolución. En primer lugar calculamos una forma clausal de F_1

$$\begin{aligned}
& (\forall x)(\exists x_1)(\forall y)(\exists y_1)(\forall z)(\exists z_1)P(x,x_1,y,y_1,z,z_1)\\
\equiv_{sat}\ & (\forall x)(\forall y)(\exists y_1)(\forall z)(\exists z_1)P(x,f_1(x),y,y_1,z,z_1)\\
\equiv_{sat}\ & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists z_1)P(x,f_1(x),y,f_2(x,y),z,z_1)\\
\equiv_{sat}\ & (\forall x)(\forall y)(\forall z)P(x,f_1(x),y,f_2(x,y),z,f_3(x,y,z))\\
\equiv\ & \{\{P(x,f_1(x),y,f_2(x,y),z,f_3(x,y,z))\}\}
\end{aligned}$$

y una forma clausal de $\neg F_2$

$$\begin{aligned}
& \neg(\exists x)(\forall x_1)(\exists y)(\forall y_1)(\exists z)(\exists u)P(z,x,x_1,y,y_1,u)\\
\equiv\ & (\forall x)(\exists x_1)(\forall y)(\exists y_1)(\forall z)(\forall u)\neg P(z,x,x_1,y,y_1,u)\\
\equiv_{sat}\ & (\forall x)(\forall y)(\exists y_1)(\forall z)(\forall u)\neg P(z,x,f_4(x),y,y_1,u)\\
\equiv_{sat}\ & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)\neg P(z,x,f_4(x),y,f_5(x,y),u)\\
\equiv\ & \{\{\neg P(z,x,f_4(x),y,f_5(x,y),u)\}\}
\end{aligned}$$

Las cláusulas obtenidas son

$$\begin{aligned}
C_1 :\ & \{P(x,f_1(x),y,f_2(x,y),z,f_3(x,y,z))\}\\
C_2 :\ & \{\neg P(z,x,f_4(x),y,f_5(x,y),u)\}
\end{aligned}$$

Para calcular una resolvente de C_1 y C_2 separamos las variables aplicándole a C_1 el renombramiento $\theta = [x/x_1, y/y_1, z/z_1]$ con lo que se obtiene

$$C_1\theta = \{P(x_1, f_1(x_1), y_1, f_2(x_1, y_1), z_1, f_3(x_1, y_1, z_1))\}$$

y calculamos un unificador de máxima generalidad de $P(x_1, f_1(x_1), y_1, f_2(x_1, y_1), z_1, f_3(x_1, y_1, z_1))$ y $P(z, x, f_4(x), y, f_5(x, y), u)$

$$\begin{array}{rl}
 & \mathsf{unif}((P(x_1, f_1(x_1), y_1, f_2(x_1, y_1), z_1, f_3(x_1, y_1, z_1)) = P(z, x, f_4(x), y, f_5(x, y), u)), \\
 & \quad \epsilon) \\
= & \mathsf{unif}((x_1 = z, f_1(x_1) = x, y_1 = f_4(x), f_2(x_1, y_1) = y, z_1 = f_5(x, y), f_3(x_1, y_1, z_1) = u)), \\
 & \quad \epsilon) \\
= & \mathsf{unif}((f_1(x_1) = x, y_1 = f_4(x), f_2(x_1, y_1) = y, z_1 = f_5(x, y), f_3(x_1, y_1, z_1) = u)), \\
 & \quad [z/x_1]) \\
= & \mathsf{unif}((y_1 = f_4(f_1(x_1)), f_2(x_1, y_1) = y, z_1 = f_5(f_1(x_1), y), f_3(x_1, y_1, z_1) = u)), \\
 & \quad [z/x_1, x/f_1(x_1)]) \\
= & \mathsf{unif}((f_2(x_1, f_4(f_1(x_1))) = y, z_1 = f_5(f_1(x_1), y), f_3(x_1, f_4(f_1(x_1)), z_1) = u),) \\
 & \quad [z/x_1, x/f_1(x_1), y_1/f_4(f_1(x_1))]) \\
= & \mathsf{unif}((z_1 = f_5(f_1(x_1), f_2(x_1, f_4(f_1(x_1)))), f_3(x_1, f_4(f_1(x_1)), z_1) = u)), \\
 & \quad [z/x_1, x/f_1(x_1), y_1/f_4(f_1(x_1)), y/f_2(x_1, f_4(f_1(x_1)))]) \\
= & \mathsf{unif}((f_3(x_1, f_4(f_1(x_1)), f_5(f_1(x_1), f_2(x_1, f_4(f_1(x_1))))) = u)), \\
 & \quad [z/x_1, x/f_1(x_1), y_1/f_4(f_1(x_1)), y/f_2(x_1, f_4(f_1(x_1))), z_1/f_5(f_1(x_1), f_2(x_1, f_4(f_1(x_1))))]) \\
= & \mathsf{unif}(()), \\
 & \quad [z/x_1, x/f_1(x_1), y_1/f_4(f_1(x_1)), y/f_2(x_1, f_4(f_1(x_1))), z_1/f_5(f_1(x_1), f_2(x_1, f_4(f_1(x_1)))), \\
 & \quad\; u/f_3(x_1, f_4(f_1(x_1)), f_5(f_1(x_1), f_2(x_1, f_4(f_1(x_1)))))]) \\
= & [z/x_1, x/f_1(x_1), y_1/f_4(f_1(x_1)), y/f_2(x_1, f_4(f_1(x_1))), z_1/f_5(f_1(x_1), f_2(x_1, f_4(f_1(x_1)))), \\
 & \; u/f_3(x_1, f_4(f_1(x_1)), f_5(f_1(x_1), f_2(x_1, f_4(f_1(x_1)))))]
\end{array}$$

Por tanto, la resolvente de C_1 y C_2 es la cláusula vacía. De lo que se sigue que $\{F_1, \neg F_2\}$ es inconsistente y $F_1 \models F_2$.

Apartado 2: Decidir $F_3 \models F_2$ se reduce a decidir si $\{F_3, \neg F_2\}$ es inconsistente. Lo haremos por resolución. En primer lugar calculamos una forma clausal de F_3

$$\begin{array}{rl}
 & (\exists x)(\forall x_1)(\exists y)(\exists y_1)(\forall z)(\exists z_1)P(x, x_1, y, y_1, z, z_1) \\
\equiv_{sat} & (\forall x_1)(\exists y)(\exists y_1)(\forall z)(\exists z_1)P(a, x_1, y, y_1, z, z_1) \\
\equiv_{sat} & (\forall x_1)(\exists y_1)(\forall z)(\exists z_1)P(a, x_1, f_6(x_1), y_1, z, z_1) \\
\equiv_{sat} & (\forall x_1)(\forall z)(\exists z_1)P(a, x_1, f_6(x_1), f_7(x_1), z, z_1) \\
\equiv_{sat} & (\forall x_1)(\forall z)P(a, x_1, f_6(x_1), f_7(x_1), z, f_8(x_1, z)) \\
\equiv & \{\{P(a, x_1, f_6(x_1), f_7(x_1), z, f_8(x_1, z))\}\}
\end{array}$$

Las cláusulas de $\neg F_2$ y F_3 son

$$\begin{array}{rl}
C_2: & \{\neg P(z, x, f_4(x), y, f_5(x, y), u)\} \\
C_3: & \{P(a, x_1, f_6(x_1), f_7(x_1), z, f_8(x_1, z))\}
\end{array}$$

Para calcular una resolvente de C_2 y C_3 calculamos un unificador de máxima generalidad de los literales $P(z, x, f_4(x), y, f_5(x, y), u)$ y $P(a, x_1, f_6(x_1), f_7(x_1), z, f_8(x_1, z))$.

$$\begin{array}{ll} & \mathsf{unif}((P(z,x,f_4(x),y,f_5(x,y),u) = P(a,x_1,f_6(x_1),f_7(x_1),z,f_8(x_1,z)), \\ & \quad \epsilon) \\ = & \mathsf{unif}((z=a, x=x_1, f_4(x)=f_6(x_1), y=f_7(x_1), f_5(x,y)=z, u=f_8(x_1,z)), \\ & \quad \epsilon) \\ = & \mathsf{unif}((x=x_1, f_4(x)=f_6(x_1), y=f_7(x_1), f_5(x,y)=z, u=f_8(x_1,z)), \\ & \quad [z/a]) \\ = & \mathsf{unif}((f_4(x_1)=f_6(x_1), y=f_7(x_1), f_5(x,y)=z, u=f_8(x_1,z)), \\ & \quad [z/a, x/x_1]) \\ = & \mathsf{unif}((f_4(x_1)=f_6(x_1), y=f_7(x_1), f_5(x,y)=z, u=f_8(x_1,z)), \\ & \quad [z/a, x/x_1]) \\ = & \text{“No unificable”} \end{array}$$

Por tanto, C_2 y C_3 no tienen resolventes. De lo que se sigue que $\{F_3, \neg F_2\}$ es consistente y $F_3 \not\models F_2$. Un contramodelo de Herbrand se obtiene haciendo

$$I(P) = \{P(a,t_1,f_6(t_1),f_7(t_1),t,f_8(t_1,t)) : t, t_1 \in UH\},$$

donde UH representa el universo de Herbrand definido recursivamente por

- $a \in UH$,
- Si $t \in UH$, entonces $f_4(t), f_6(t), f_7(t) \in UH$
- Si $t_1, t_2 \in UH$ entonces $f_5(t_1,t_2), f_8(t_1,t_2) \in UH$.

Ejercicio 102 *Se considera el conjunto* $S = \{(\forall x)[P(x,y) \to \neg Q(z)],\ P(x,v),\ (\exists u)Q(u)\}$

1. *Probar que S es consistente.*
2. *Decidir si S tiene o no un modelo, justificando la respuesta.*

Solución:
Apartado 1: Probar que S es consistente se reduce a probar que

$$S_1 = \{(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists v)[(\forall x)[P(x,y) \to \neg Q(z)] \wedge P(x,v) \wedge (\exists u)Q(u)]$$

lo es. Lo haremos por resolución. Comenzamos calculando una forma clausal de S_1

$$\begin{array}{ll} & (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists v)[(\forall x)[P(x,y) \to \neg Q(z)] \wedge P(x,v) \wedge (\exists u)Q(u)] \\ \equiv & (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists v)[(\forall x_1)[P(x_1,y) \to \neg Q(z)] \wedge P(x,v) \wedge (\exists u)Q(u)] \\ \equiv & (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists v)(\exists u)(\forall x_1)[(\neg P(x_1,y) \vee \neg Q(z)) \wedge P(x,v) \wedge Q(u)] \\ \equiv_{sat} & (\forall x_1)[(\neg P(x_1,b) \vee \neg Q(c)) \wedge P(a,d) \wedge Q(e)] \\ \equiv & \{\{\neg P(x_1,b), \neg Q(c)\}, \{P(a,d)\}, \{Q(e)\}\} \end{array}$$

Las cláusulas obtenidas son

$$\begin{array}{ll} C_1: & \{\neg P(x_1,b), \neg Q(c)\} \\ C_2: & \{P(a,d)\} \\ C_3: & \{Q(e)\} \end{array}$$

Entre las cláusulas no hay resolventes. Por tanto, S_1 es consistente y un modelo de Herbrand de S_1 es $\{P(a,d), Q(e)\}$. Es decir, el universo es $U = \{a,b,c,d,e\}$, la interpretación de P es $I(P) = \{(a,d)\}$ y la de Q es $I(Q) = \{e\}$. Además, (U,I) con la asignación A tal que $A(x) = a$, $A(y) = b$, $A(z) = c$ y $A(v) = d$ verifica el conjunto S. En efecto,

$$\{\underset{1}{(\forall x)}[P(x,y) \underset{1}{\to} \underset{1}{\neg}\underset{1}{Q}(\underset{c}{z})],\ \underset{1}{P}(\underset{a}{x},\underset{d}{v}),\ (\underset{1}{\exists}\underset{e}{u})\underset{1}{Q}(\underset{e}{u})\}$$

Apartado 2: Decidir si S tiene modelo se reduce a decidir si

$$S_2 = \{(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall v)[(\forall x)[P(x,y) \to \neg Q(z)] \wedge P(x,v) \wedge (\exists u)Q(u)]$$

lo es. Lo haremos por resolución. Comenzamos calculando una forma clausal de S_1

$$\begin{array}{ll}
 & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall v)[(\forall x)[P(x,y) \to \neg Q(z)] \wedge P(x,v) \wedge (\exists u)Q(u)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall v)[(\forall x_1)[P(x_1,y) \to \neg Q(z)] \wedge P(x,v) \wedge (\exists u)Q(u)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall v)(\exists u)(\forall x_1)[(\neg P(x_1,y) \vee \neg Q(z)) \wedge P(x,v) \wedge Q(u)] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall v)(\forall x_1)[(\neg P(x_1,y) \vee \neg Q(z)) \wedge P(x,v) \wedge Q(f(x,y,z,v))] \\
\equiv & \{\{\neg P(x_1,y), \neg Q(z)\}, \{P(x,v)\}, \{Q(f(x,y,z,v))\}\}
\end{array}$$

Las cláusulas obtenidas son

$$\begin{array}{ll}
C_1: & \{\neg P(x_1,y), \neg Q(z)\} \\
C_2: & \{P(x,v)\} \\
C_3: & \{Q(f(x,y,z,v))\}
\end{array}$$

Una refutación es

$$\begin{array}{lll}
1 & \{\neg P(x_1,y), \neg Q(z)\} & \\
2 & \{P(x,v)\} & \\
3 & \{Q(f(x,y,z,v))\} & \\
4 & \{\neg Q(z)\} & \text{Res. de 1 y 2 con } \sigma = [x/x_1, v/y] \\
5 & \square & \text{Res. de } 4[z/z_1] \text{ y 3 con } \sigma = [z_1/f(x,y,z,v)]
\end{array}$$

Por tanto, S_2 es inconsistente y S no tiene modelos.

Ejercicio 103 *Se considera el siguiente argumento:*

> Algunas personas admiran a los que tienen bigote. Algunas personas no simpatizan con nadie que admire a los que tienen bigote. Luego algunas personas no son simpáticas a todos.

1. *Formalizar el argumento utilizando los símbolos $B(x)$: x tiene bigote, $A(x,y)$: x admira y, $S(x,y)$: x simpatiza con y.*
2. *Dedidir, mediante cualquiera de los métodos de demostración estudiados en el curso, la validez del argumento.*

Solución:

Apartado 1: La formalización es la siguiente

- Algunas personas admiran a los que tienen bigote:

  $$F_1 : (\exists x)(\forall y)[B(y) \rightarrow A(x,y)]$$

- Algunas personas no simpatizan con nadie que admire a los que tienen bigote:

  $$F_2 : (\exists x)(\forall y)[(\forall z)[B(z) \rightarrow A(y,z)] \rightarrow \neg S(x,y)]$$

- Algunas personas no son simpáticas a todos:

  $$F_3 : (\exists x)\neg(\forall y)S(x,y)$$

Apartado 2: Vamos a decidir por resolución si $\{F_1, F_2\} \models F_3$. En primer lugar calculamos una forma clausal de F_1

$$\begin{array}{ll}
 & (\exists x)(\forall y)[B(y) \rightarrow A(x,y)] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)[\neg B(y) \vee A(x,y)] \\
\equiv_{sat} & (\forall y)[\neg B(y) \vee A(a,y)] \\
\equiv & \{\{\neg B(y), A(a,y)\}\}
\end{array}$$

una forma clausal de F_2

$$\begin{array}{ll}
 & (\exists x)(\forall y)[(\forall z)[B(z) \rightarrow A(y,z)] \rightarrow \neg S(x,y)] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)[\neg(\forall z)[B(z) \rightarrow A(y,z)] \vee \neg S(x,y)] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)[(\exists z)\neg(B(z) \rightarrow A(y,z)) \vee \neg S(x,y)] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)[(\exists z)[B(z) \wedge \neg A(y,z)] \vee \neg S(x,y)] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[(B(z) \wedge \neg A(y,z)) \vee \neg S(x,y)] \\
\equiv_{sat} & (\forall y)(\exists z)[(B(z) \wedge \neg A(y,z)) \vee \neg S(b,y)] \\
\equiv_{sat} & (\forall y)[(B(f(y)) \wedge \neg A(y,f(y))) \vee \neg S(b,y)] \\
\equiv & (\forall y)[(B(f(y)) \vee \neg S(b,y)) \wedge (\neg A(y,f(y)) \vee \neg S(b,y))] \\
\equiv & \{\{B(f(y)), \neg S(b,y)\}, \{\neg A(y,f(y)), \neg S(b,y)\}\}
\end{array}$$

y una forma clausal de $\neg F_3$

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)\neg(\forall y)S(x,y) \\
\equiv & (\forall x)\neg\neg(\forall y)S(x,y) \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)S(x,y) \\
\equiv & \{\{S(x,y)\}\}
\end{array}$$

Una refutación es

1	$\{\neg B(y), A(a,y)\}$	
2	$\{B(f(y)), \neg S(b,y)\}$	
3	$\{\neg A(y,f(y)), \neg S(b,y)\}$	
4	$\{S(x,y)\}$	
5	$\{\neg A(y,f(y))\}$	Res. de 4 y 3 con $\sigma = [x/b]$
6	$\{B(f(y))\}$	Res. de 4 y 2 con $\sigma = [x/b]$
7	$\{A(a,f(y))\}$	Res. de 6 y 1$[y/y_1]$ con $\sigma = [y_1/f(y)]$
8	$\square$	Res. de 7 y 5 con $\sigma = [y/a]$

Por tanto, $\{F_1, F_2, \neg F_3\}$ es inconsistente y $\{F_1, F_2\} \models F_3$.

Ejercicio 104 *Probar mediante deducción natural:*

1. $\models ((p \land q) \rightarrow (r \lor s)) \rightarrow ((p \rightarrow r) \lor (q \rightarrow s))$
2. $\{(\forall x)[Q(x) \rightarrow \neg R(x)],$
   $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x) \lor S(x)],$
   $(\exists x)[P(x) \land R(x)]\}$
   $\models (\exists x)[P(x) \land S(x)]$

Solución:
Apartado 1: $\models ((p \land q) \rightarrow (r \lor s)) \rightarrow ((p \rightarrow r) \lor (q \rightarrow s))$

La solución se muestra en la figura 9 (página 152).
Apartado 2: $\{(\forall x)[Q(x) \rightarrow \neg R(x)],$
$(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x) \lor S(x)],$
$(\exists x)[P(x) \land R(x)]\}$
$\models (\exists x)[P(x) \land S(x)]$

La solución se muestra en la figura 10 (página 153).

1	$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$	Supuesto
2	$p \vee \neg p$	LEM
3	p	Supuesto
4	$q \vee \neg q$	LEM
5	q	Supuesto
6	$p \wedge q$	I$\wedge$ $3, 5$
7	$r \vee s$	E$\rightarrow$ $1, 6$
8	r	Supuesto
9	p	Supuesto
10	r	Hyp
11	$p \rightarrow r$	I$\rightarrow$ $9 - 10$
12	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s)$	I$\vee$ 11
13	s	Supuesto
14	q	Supuesto
15	s	Hyp
16	$q \rightarrow s$	I$\rightarrow$ $14 - 15$
17	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s)$	I$\vee$ 16
18	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s)$	E$\vee$ $7, 8 - 12, 13 - 17$
19	$\neg q$	Supuesto
20	q	Supuesto
21	$\perp$	E$\neg$ $19, 20$
22	s	E$\perp$ 21
23	$q \rightarrow s$	I$\rightarrow$ $20 - 22$
24	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s)$	I$\vee$ 23
25	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s)$	E$\vee$ $4, 5 - 18, 19 - 24$
26	$\neg p$	Supuesto
27	p	Supuesto
28	$\perp$	E$\neg$ $26, 27$
29	r	E$\perp$ 28
30	$p \rightarrow r$	I$\rightarrow$ $27 - 29$
31	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s)$	I$\vee$ 30
32	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s)$	E$\vee$ $2, 3 - 25, 26 - 31$
33	$((p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s))$	I$\rightarrow$ $1 - 32$

Figura 9: Apartado 1

1	$(\forall x)[Q(x) \to \neg R(x)]$	Supuesto
2	$(\forall x)[P(x) \to Q(x) \vee S(x)]$	Supuesto
3	$(\exists x)[P(x) \wedge R(x)]$	Supuesto
4	actual i	Supuesto
5	$P(i) \wedge R(i)$	Supuesto
6	$P(i) \to Q(i) \vee S(i)$	E$\forall$ 2
7	$P(i)$	E$\wedge$ 5
8	$Q(i) \vee S(i)$	E$\to$ $6, 7$
9	$Q(i)$	Supuesto
10	$Q(i) \to \neg R(i)$	E$\forall$ $1, 4$
11	$\neg R(i)$	E$\to$ $10, 9$
12	$R(i)$	E$\wedge$ 5
13	$\bot$	E$\neg$ $11, 12$
14	$S(i)$	E$\bot$ 13
15	$P(i) \wedge S(i)$	I$\wedge$ $7, 14$
16	$(\exists x)[P(x) \wedge S(x)]$	I$\exists$ $15, 4$
17	$S(i)$	Supuesto
18	$P(i) \wedge S(i)$	I$\wedge$ $7, 17$
19	$(\exists x)[P(x) \wedge S(x)]$	I$\exists$ $18, 4$
20	$(\exists x)[P(x) \wedge S(x)]$	E$\vee$ $8, 9-16, 17-19$
21	$(\exists x)[P(x) \wedge S(x)]$	E$\exists$ $3, 4-20$

Figura 10: Apartado 2

Examen de Septiembre de 2006

Ejercicio 105 *Sea F la fórmula*

$$((p \lor q) \leftrightarrow \neg(p \lor q)) \lor (((\neg p \lor q) \to \neg((q \land r) \to \neg p)) \land (r \to \neg(q \lor p)))$$

Decidir, mediante tablero semántico, si F es satisfacible. En el caso de que lo sea, calcular un modelo I de F a partir del tablero y comprobar que I es modelo de F.

Solución:

La fórmula F es satisfacible si el tablero semántico de F tiene una rama abierta. En la figura 11 se muestra una rama abierta del tablero semántico de F. Por tanto, F es safisfacible.

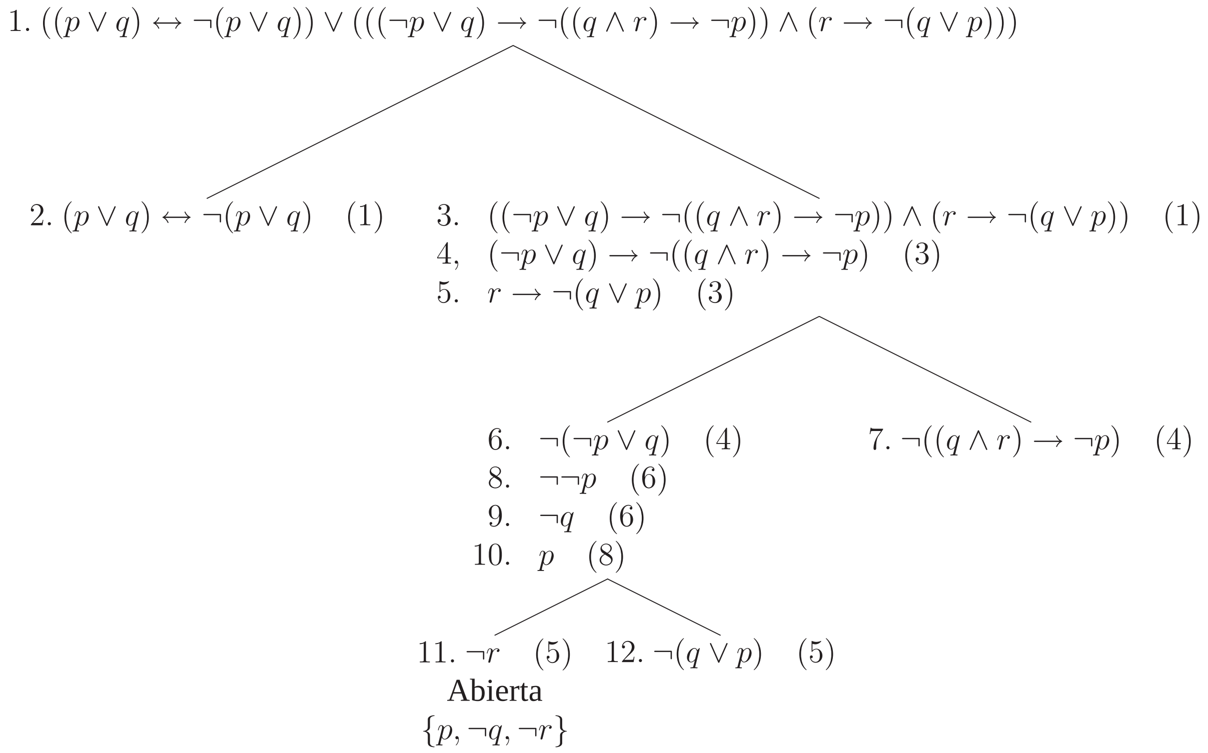


Figura 11: Rama abierta del tablero semántico

La interpretación I tal que $I(p) = 1$, $I(q) = 0$ y $I(r) = 1$ es un modelo de F. Efectivamente,

$$I(((p \lor q) \leftrightarrow \neg(p \lor q)) \lor (((\neg p \lor q) \to \neg((q \land r) \to \neg p)) \land (r \to \neg(q \lor p))))$$

1 0 0 1
0 0 1
0 0
1 1
1
1

Ejercicio 106 *Decidir si el siguiente conjunto de fórmulas es consistente*

$$\begin{array}{ll} S = \{ & (\forall x)[A(x) \land (\exists y)[\neg B(y) \to C(x,y)]], \\ & (\exists x)A(x), \\ & \neg(\forall y)(\exists z)C(z,y), \\ & (\forall y)(\exists x)(\forall z)[(B(x) \to A(z)) \to (\neg C(y,z) \to \neg B(y))] \ \} \end{array}$$

Si S es consistente, obtener razonadamente un modelo de S.

Solución:

Vamos a decidir la consistencia de S usando resolución, Para ello, comenzamos calculando una forma clausal de S.

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)[A(x) \land (\exists y)[\neg B(y) \to C(x,y)]] \\ \equiv & (\forall x)[A(x) \land (\exists y)[\neg\neg B(y) \lor C(x,y)]] \\ \equiv & (\forall x)[A(x) \land (\exists y)[B(y) \lor C(x,y)]] \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[A(x) \land (B(y) \lor C(x,y))] \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[A(x) \land (B(f(x)) \lor C(x,f(x)))] \\ \equiv & \{\{A(x)\}, \{B(f(x)), C(x,f(x))\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & (\exists x)A(x) \\ \equiv_{sat} & A(a) \\ \equiv & \{\{A(a)\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \neg(\forall y)(\exists z)C(z,y) \\ \equiv & (\exists y)(\forall z)\neg C(z,y) \\ \equiv_{sat} & (\forall z)\neg C(z,b) \\ \equiv_{sat} & \{\{\neg C(z,b)\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & (\forall y)(\exists x)(\forall z)[(B(x) \to A(z)) \to (\neg C(y,z) \to \neg B(y))] \\ \equiv & (\forall y)(\exists x)(\forall z)[(\neg B(x) \lor A(z)) \to (\neg\neg C(y,z) \lor \neg B(y))] \\ \equiv & (\forall y)(\exists x)(\forall z)[(\neg B(x) \lor A(z)) \to (C(y,z) \lor \neg B(y))] \\ \equiv & (\forall y)(\exists x)(\forall z)[\neg(\neg B(x) \lor A(z)) \lor (C(y,z) \lor \neg B(y))] \\ \equiv & (\forall y)(\exists x)(\forall z)[(\neg\neg B(x) \land \neg A(z)) \lor (C(y,z) \lor \neg B(y))] \\ \equiv & (\forall y)(\exists x)(\forall z)[(B(x) \land \neg A(z)) \lor (C(y,z) \lor \neg B(y))] \\ \equiv & (\forall y)(\exists x)(\forall z)[(B(x) \lor C(y,z) \lor \neg B(y)) \land (\neg A(z) \lor C(y,z) \lor \neg B(y))] \\ \equiv_{sat} & (\forall y)(\forall z)[(B(g(y)) \lor C(y,z) \lor \neg B(y)) \land (\neg A(z) \lor C(y,z) \lor \neg B(y))] \\ \equiv & \{\{B(g(y)), C(y,z), \neg B(y)\}, \{\neg A(z), C(y,z), \neg B(y)\}\} \end{array}$$

La forma de clausal de S es el conjunto cuyas cláusulas son

$$\begin{aligned} C_1 &= \{A(x)\} \\ C_2 &= \{B(f(x)), C(x, f(x))\} \\ C_3 &= \{A(a)\} \\ C_4 &= \{\neg C(z, b)\} \\ C_5 &= \{B(g(y)), C(y, z), \neg B(y)\} \\ C_6 &= \{\neg A(z), C(y, z), \neg B(y)\} \end{aligned}$$

Para decidir la consistencia de S puede ignorarse la cláusula $C_3 = \{A(a)\}$, ya que está subsumida por la $C_1 = \{A(x)\}$. Vamos a calcular la saturación de S por resolución.

En el primer paso, elegimos la cláusula $C_1 = \{A(x)\}$ que no genera ninguna resolvente con las cláusulas elegidas.

En el segundo paso, elegimos la cláusula $C_4 = \{\neg C(z, b)\}$ que no genera ninguna resolvente con las cláusulas elegidas.

En el tercer paso, elegimos la cláusula $C_2 = \{B(f(x)), C(x, f(x))\}$ que no genera ninguna resolvente con las cláusulas elegidas.

En el cuarto paso, elegimos la cláusula $C_6 = \{\neg A(z), C(y, z), \neg B(y)\}$ que genera las siguientes resolventes:

- la resolvente de $C_6 = \{\neg A(z), C(y, z), \neg B(y)\}$ y $C_1 = \{A(x)\}$ con unificador $\{x/z\}$ es
$$C_7 = \{C(y, z), \neg B(y)\}$$
- la resolvente de $C_6 = \{\neg A(z), C(y, z), \neg B(y)\}$ y $C_4 = \{\neg C(z, b)\}$ aplicándole a C_6 la sustitución $\{z/x\}$ y unificando con $\{z/y, x/b\}$ es $\{\neg A(b), \neg B(y)\}$ que al simplificarse con C_1 se transforma en
$$C_8 = \{\neg B(y)\}$$
- la resolvente de $C_6 = \{\neg A(z), C(y, z), \neg B(y)\}$ y $C_2 = \{B(f(x)), C(x, f(x))\}$ con unificador $\{y/f(x)\}$ es $\{\neg A(z), C(f(x), z), C(x, f(x))\}$ que al simplificarse con C_1 se transforma en
$$C_9 = \{C(f(x), z), C(x, f(x))\}$$

La cláusula C_8 subsume a las cláusulas C_7, C_6 y C_5.

En el quinto paso, elegimos la cláusula $C_8 = \{\neg B(y)\}$ que genera con $C_2 = \{B(f(x)), C(x, f(x))\}$ y unificador $\{y/f(x)$ la resolvente
$$C_{10} = \{C(x, f(x))\}$$
que subsume las cláusulas C_2 y C_9.

En el sexto paso, elegimos la cláusula $C_{10} = \{C(x, f(x))\}$ que no genera ninguna resolvente.

Se ha terminado la saturación sin encontrar la cláusula vacía. Por tanto, S es consistente.

Para obtener un modelo nos fijamos en las cláusulas que quedan después de la saturación: $C_1 = \{A(x)\}$, $C_4 = \{\neg C(z, b)\}$, $C_8 = \{\neg B(y)\}$ y $C_{10} = \{C(x, f(x))\}$. El universo de Herbrand es $U = \{b, f(b), f(f(b)), \dots\}$. Sea $\mathcal{I}$ la interpretación de Herbrand tal que $A^I = U$, $B^I = \emptyset$ y $C^I = \{(x, f(x)) : x \in U\}$. Fácilmente se comprueba que $\mathcal{I}$ es un modelo de las cláusulas anteriores y del conjunto S.

Un modelo finito es $\mathcal{I}' = (U', I')$ con $U' = \{0,1\}$, $b^{I'} = 1$, $f^{I'} = \{(0,0),(1,0)\}$, $A^{I'} = \{0,1\}$, $B^{I'} = \emptyset$ y $C^{I'} = \{(0,0),(1,0)\}$.

Ejercicio 107 *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Para toda fórmula F, toda subfórmula G de F y toda variable libre x de G, se tiene que x es una variable libre de F.*
2. *Para toda fórmula F y toda fórmula G, se tiene $(\exists x)[F \wedge G] \equiv (\exists x)F \wedge (\exists x)G$.*
3. *Para ninguna fórmula F y ninguna fórmula G, se tiene $(\exists x)[F \wedge G] \equiv (\exists x)F \wedge (\exists x)G$.*

Solución:

Apartado 1 Es falso como se observa tomando como F la fórmula $(\forall x)P(x)$ y como G la fórmula $P(x)$. Entonces, G es una subfórmula de F y x es una variable libre de G que no es una variable libre de F.

Apartado 2 Es falso como se observa tomando como F la fórmula $P(x)$ y como G la fórmula $Q(x)$. Entonces $(\exists x)[F \wedge G] \not\equiv (\exists x)F \wedge (\exists x)G$ ya que hay interpretaciones en las que se verifica $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$ y no se verifica $(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$. Por ejemplo, $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{0,1\}$, $P^I = \{0\}$ y $Q^I = \{1\}$.

Apartado 2 Es falso como se observa tomando como F y G la misma fórmula. Otro contraejemplo consiste en tomar como F ó G una fórmula en la que no ocurra la variable x.

Ejercicio 108 *Decidir, por resolución, si la fórmula*

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)[P(z,y) \leftrightarrow \neg P(z,x)]$$

es consecuencia lógica de la fórmula

$$(\exists y)(\forall x)[P(x,y) \leftrightarrow P(x,x)].$$

Solución:

Lo decidiremos por resolución. Para ello calculamos las formas clausales de la hipótesis y de la negación de ls conclusión.

$$\begin{array}{ll}
 & (\exists y)(\forall x)[P(x,y) \leftrightarrow P(x,x)] \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)[(P(x,y) \rightarrow P(x,x)) \wedge (P(x,x) \rightarrow P(x,y)] \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)[(\neg P(x,y) \vee P(x,x)) \wedge (\neg P(x,x) \vee P(x,y)] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[(\neg P(x,a) \vee P(x,x)) \wedge (\neg P(x,x) \vee P(x,a)] \\
\equiv & \{\{\neg P(x,a), P(x,x)\}, \{\neg P(x,x), P(x,a)\}\}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)[P(z,y) \leftrightarrow \neg P(z,x)] \\
\equiv & \neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)[(P(z,y) \to \neg P(z,x)) \wedge (\neg P(z,x) \to P(z,y))] \\
\equiv & \neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)[(\neg P(z,y) \vee \neg P(z,x)) \wedge (\neg\neg P(z,x) \vee P(z,y))] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[\neg((\neg P(z,y) \vee \neg P(z,x)) \wedge (P(z,x) \vee P(z,y)))] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[\neg(\neg P(z,y) \vee \neg P(z,x)) \vee \neg(P(z,x) \vee P(z,y))] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[(\neg\neg P(z,y) \wedge \neg\neg P(z,x)) \vee (\neg P(z,x) \wedge \neg P(z,y))] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[(P(z,y) \wedge P(z,x)) \vee (\neg P(z,x) \wedge \neg P(z,y))] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[(P(z,y) \vee (\neg P(z,x) \wedge \neg P(z,y))) \wedge (P(z,x) \vee (\neg P(z,x) \wedge \neg P(z,y)))] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[(P(z,y) \vee \neg P(z,x)) \wedge (P(z,y) \vee \neg P(z,y)) \wedge \\
 & \qquad\qquad\qquad (P(z,x) \vee \neg P(z,x)) \wedge (P(z,x) \vee \neg P(z,y))] \\
\equiv_{sat} & (\forall y)(\exists z)[(P(z,y) \vee \neg P(z,b)) \wedge (P(z,y) \vee \neg P(z,y)) \wedge \\
 & \qquad\qquad (P(z,b) \vee \neg P(z,b)) \wedge (P(z,b) \vee \neg P(z,y))] \\
\equiv_{sat} & (\forall y)[(P(f(y),y) \vee \neg P(f(y),b)) \wedge (P(f(y),y) \vee \neg P(f(y),y)) \wedge \\
 & \qquad (P(f(y),b) \vee \neg P(f(y),b)) \wedge (P(f(y),b) \vee \neg P(f(y),y))] \\
\equiv & \{\{P(f(y),y), \neg P(f(y),b)\}, \{P(f(y),y), \neg P(f(y),y)\}, \\
 & \;\{P(f(y),b), \neg P(f(y),b)\}, \{P(f(y),b), \neg P(f(y),y)\}\}
\end{array}
$$

La conclusión es consecuencia de la hipótesis syss el conjunto S formado por las cláusulas obtenidas es inconsistente. Las cláusulas obtenidas son

$$
\begin{array}{ll}
C_1 & = \{\neg P(x,a), P(x,x)\} \\
C_2 & = \{\neg P(x,x), P(x,a)\} \\
C_3 & = \{P(f(y),y), \neg P(f(y),b)\} \\
C_4 & = \{P(f(y),y), \neg P(f(y),y)\} \\
C_5 & = \{P(f(y),b), \neg P(f(y),b)\} \\
C_6 & = \{P(f(y),b), \neg P(f(y),y)\}
\end{array}
$$

Para decidir la consistencia de S pueden ignorarse las cláusulas C_4 y C_5 porque son tautológicas. Vamos a calcular la saturación de S por resolución.

En el primer paso, elegimos la cláusula $C_1 = \{\neg P(x,a), P(x,x)\}$ que no genera ninguna resolvente no–tautológica con las cláusulas elegidas.

En el segundo paso, elegimos la cláusula $C_2 = \{\neg P(x,x), P(x,a)\}$ que no genera ninguna resolvente no–tautológica con las cláusulas elegidas.

En el tercer paso, elegimos la cláusula $C_3 = \{P(f(y),y), \neg P(f(y),b)\}$. La única resolvente no–tautológica de C_3 con las cláusulas elegidas es

$$C_7 = \{\neg P(f(a),b), P(f(a),f(a))\}$$

resolvente de C_3 con $C_1 = \{\neg P(x,a), P(x,x)\}$ usando el unificador $\{y/a, x/f(a)\}$.

En el cuarto paso, elegimos la cláusula $C_6 = \{P(f(y),b), \neg P(f(y),y)\}$. La única resolvente no–tautológica de C_6 con las cláusulas elegidas es

$$C_8 = \{P(f(a),b), \neg P(f(a),f(a))\}$$

resolvente de C_6 con $C_2 = \{\neg P(x,x), P(x,a)\}$ usando el unificador $\{y/a, x/f(a)\}$.

En el quinto paso, elegimos la cláusula $C_7 = \{\neg P(f(a),b), P(f(a),f(a))\}$. Las resolventes no–tautológicas de C_7 con las cláusulas elegidas son

- $\{P(f(a),f(a)), \neg P(f(a),a)\}$ resolvente de C_7 y $C_6 = \{P(f(y),b), \neg P(f(y),y)\}$ con unificador $\{y/a\}$. La resolvente está subsumida en $C_1 = \{\neg P(x,a), P(x,x)\}$ y se elimina.

- $\{\neg P(f(a),b), P(f(a),a)\}$ resolvente de C_7 y $C_2 = \{\neg P(x,x), P(x,a)\}$ con unificador $\{x/f(a)\}$. La resolvente está subsumida en $C_3 = \{P(f(y),y), \neg P(f(y),b)\}$ y se elimina.

En el sexto paso, elegimos la cláusula $C_8 = \{P(f(a),b), \neg P(f(a),f(a))\}$. Las resolventes no–tautológicas de C_7 con las cláusulas elegidas son

- $\{\neg P(f(a),f(a)), P(f(a),a)\}$ resolvente de C_8 y $C_3 = \{P(f(y),y), \neg P(f(y),b)\}$ con unificador $\{y/a\}$. La resolvente está subsumida en $C_2 = \{\neg P(x,x), P(x,a)\}$ y se elimina.

- $\{P(f(a),b), \neg P(f(a),a)\}$ resolvente de C_8 y $C_1 = \{\neg P(x,a), P(x,x)\}$ con unificador $\{x/f(a)\}$. La resolvente está subsumida en $C_6 = \{P(f(y),b), \neg P(f(y),y)\}$ y se elimina.

Se ha terminado la saturación sin encontrar la cláusula vacía. Por tanto, S es consistente y se verifica que $(\exists y)(\forall x)[P(x,y) \leftrightarrow P(x,x)] \not\models (\forall x)(\exists y)(\forall z)[P(z,y) \leftrightarrow \neg P(z,x)]$

Para obtener un contramodelo nos fijamos en las cláusulas que quedan después de la saturación:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{\neg P(x,a), P(x,x)\}\\
C_2 &= \{\neg P(x,x), P(x,a)\}\\
C_3 &= \{P(f(y),y), \neg P(f(y),b)\}\\
C_6 &= \{P(f(y),b), \neg P(f(y),y)\}\\
C_7 &= \{\neg P(f(a),b), P(f(a),f(a))\}\\
C_8 &= \{P(f(a),b), \neg P(f(a),f(a))\}
\end{aligned}$$

Un modelo de las cláusulas anteriores es $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{0\}$, $a^I = 0$, $b^I = 0$, $f^I = \{(0,0)\}$ y $P^I = \emptyset$. Se tiene que

$$\mathcal{I} \models (\exists y)(\forall x)[P(x,y) \leftrightarrow P(x,x)]$$
$$\mathcal{I} \not\models (\forall x)(\exists y)(\forall z)[P(z,y) \leftrightarrow \neg P(z,x)]$$

Ejercicio 109 *Probar mediante deducción natural:*

1. $(p \to r) \lor (q \to s) \models (p \land q) \to (r \lor s)$
2. $\{(\forall x)[P(x) \to (R(x) \to S(x))],\ (\exists x)[P(x) \lor \neg R(x)]\} \models (\exists x)[R(x) \to S(x)]$

Solución:

Apartado 1: $(p \to r) \lor (q \to s) \models (p \land q) \to (r \lor s)$

1	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s)$	Premisa
2	$p \wedge q$	Supuesto
3	$p \rightarrow r$	Supuesto
4	p	E$\wedge$ 2
5	r	E$\rightarrow$ $3, 4$
6	$r \vee s$	I$\vee$ 5
7	$q \rightarrow s$	Supuesto
8	q	E$\wedge$ 2
9	s	E$\rightarrow$ $3, 4$
10	$r \vee s$	I$\vee$ 5
11	$r \vee s$	E$\vee$ $1, 3-6, 7-10$
12	$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$	I$\rightarrow$ $2-11$

Apartado 2: $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow (R(x) \rightarrow S(x))],\ (\exists x)[P(x) \vee \neg R(x)]\} \models (\exists x)[R(x) \rightarrow S(x)]$

1	$(\forall x)[P(x) \rightarrow (R(x) \rightarrow S(x))]$	Premisa
2	$(\exists x)[P(x) \vee \neg R(x)]$	Premisa
3	actual $i, P(i) \vee \neg R(i)$	Supuesto
4	$P(i)$	Supuesto
5	$P(i) \rightarrow (R(i) \rightarrow S(i))$	E$\forall$ 1
6	$R(i) \rightarrow S(i)$	E$\rightarrow$ $5, 4$
7	$\neg R(i)$	Supuesto
8	$R(i)$	Supuesto
9	$\perp$	E$\neg$ $7, 8$
10	$S(i)$	E$\perp$ 9
11	$R(i) \rightarrow S(i)$	I$\rightarrow$ $8-10$
12	$R(i) \rightarrow S(i)$	E$\vee$ $3, 4-6, 7-11$
13	$(\exists x)[R(x) \rightarrow S(x)]$	I$\exists$ 12
14	$(\exists x)[R(x) \rightarrow S(x)]$	E$\exists$ $2, 3-13$