

Capítulo V: CONJUNTOS RECURSIVAMENTE ENUMERABLES

Mario de J. Pérez Jiménez
Grupo de investigación en Computación Natural
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Lógica Matemática

Curso 2010-11



Conjuntos recursivamente enumerables

La **función característica** de un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}^k$, es la función C_A definida por:

$$C_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \in A \\ 0 & \text{si } \vec{x} \in \mathbb{N}^k - A \end{cases}$$

Definición. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}^k$ es **recursivamente enumerable (r.e.)** si existe una función recursiva f de aridad k tal que $A = \text{dom}(f)$. Notaremos $A \in \Sigma_1^0$.

- ▶ $A \subseteq \mathbb{N}^k$ es r.e. si y sólo si existe un programa GOTO, P , tal que

$$\llbracket P \rrbracket^{(k)}(\vec{x}) \downarrow \iff \vec{x} \in A, \quad \text{para todo } \vec{x} \in \mathbb{N}^k$$

- ▶ Los conjuntos r.e. son los dominios de las funciones recursivas (es decir, de las funciones GOTO-computables).
- ▶ Para cada $k \geq 1$ y cada $e \in \mathbb{N}$, notaremos $W_e^{(k)} = \text{dom}(\varphi_e^{(k)})$.
- ▶ $A \in \Sigma_1^0 \iff \exists e \in \mathbb{N} (A = W_e^{(k)})$
- ▶ La familia de **todos los conjuntos r.e de aridad k** es $\{W_e^{(k)} : e \in \mathbb{N}\}$.

Proposición. Si $A \subseteq \mathbb{N}^k$ es recursivo, entonces A es r.e. Es decir, $\Delta_1^0 \subseteq \Sigma_1^0$.

- ▶ Si A es un conjunto recursivo, entonces, la función C_A es GOTO-computable. Por tanto, el programa P :

$[A_1]$ IF $C_A(X_1, X_2, \dots, X_k) = 0$ GOTO A_1

es tal que $dom(\llbracket P \rrbracket^{(k)}) = \{\vec{x} \in \mathbb{N} : C_A(\vec{x}) = 1\} = A$



¿Existen conjuntos r.e. que no sean recursivos?

Función característica parcial

La **función característica parcial** de un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}^k$, es la función C_A^* definida por:

$$C_A^*(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \in A \\ \uparrow & \text{si } \vec{x} \in \mathbb{N}^k - A \end{cases}$$

Proposición. Sea $A \subseteq \mathbb{N}^k$. Son equivalentes:

1. A es recursivamente enumerable.
2. La función característica parcial C_A^* es recursiva.

1 \Rightarrow 2 | Si A es r.e. existe f , recursiva, tal que $dom(f) = A$. Entonces, como $C_A^* = C_1 \circ f$, resulta que C_A^* es recursiva.

2 \Rightarrow 1 | Como $A = dom(C_A^*)$, si C_A^* es recursiva resultará, por definición, que A es r. e.



Unión e Intersección de conjuntos r.e.

Proposición. $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$ r.e. $\implies A \cap B$ y $A \cup B$ son r. e.

- ▶ Sean f, g funciones recursivas tales que $\text{dom}(f) = A$ y $\text{dom}(g) = B$ Sean e_1 y e_2 los códigos de programas que calculan f y g . Entonces, los programas:

$$P : \begin{cases} Y \longleftarrow f(X_1, \dots, X_k) \\ Y \longleftarrow g(X_1, \dots, X_k) \end{cases}$$

$$Q : \begin{cases} [A_1] & \text{IF STEP}^{(k)}(X_1, \dots, X_k, e_1, Z) \text{ GOTO } E \\ & \text{IF STEP}^{(k)}(X_1, \dots, X_k, e_2, Z) \text{ GOTO } E \\ & Z \longleftarrow Z + 1 \\ & \text{GOTO } A_1 \end{cases}$$

son tales que $\text{dom}(\llbracket P \rrbracket^{(k)}) = A \cap B$ y $\text{dom}(\llbracket Q \rrbracket^{(k)}) = A \cup B$.



Teorema del Complemento o de la Negación

Teorema. $A \subseteq \mathbb{N}^k$ es recursivo $\iff A$ y \bar{A} son r.e.

\implies Si A es recursivo, entonces A y \bar{A} son recursivo; luego ambos son r.e.

\impliedby Sean P_1 y P_2 programas con $e_1 = \#(P_1)$ y $e_2 = \#(P_2)$, tales que:

$$\text{dom}(\llbracket P_1 \rrbracket^{(k)}) = A \quad \text{y} \quad \text{dom}(\llbracket P_2 \rrbracket^{(k)}) = \bar{A}$$

Entonces, el programa siguiente calcula C_A :

```
[A1] IF STEP(k)(X1, ..., Xk, e1, Z) GOTO C
      IF STEP(k)(X1, ..., Xk, e2, Z) GOTO E
      Z ← Z + 1
      GOTO A1
[C]   Y ← Y + 1
```

Por tanto, A es recursivo.

Teorema de la proyección

Teorema. Son equivalentes:

1. $A \subseteq \mathbb{N}^k$ es r.e.
2. Existe un predicado recursivo $(k + 1)$ -ario $\theta(\vec{x}, t)$, tal que $A = \{\vec{x} : \exists t \theta(\vec{x}, t)\}$.

(1) \implies (2) | Sea P un programa cuyo código es e y tal que $\text{dom}(\llbracket P \rrbracket^{(k)}) = A$.
Entonces:

$$A = \{\vec{x} : \exists t \text{STEP}^{(k)}(\vec{x}, e, t)\}$$

Tómese $\theta(\vec{x}, t) \equiv \text{STEP}^{(k)}(\vec{x}, e, t)$.

(2) \longleftarrow (1) | Si $\theta(\vec{x}, t)$ es recursivo, el programa:

$$P : \begin{cases} [A_1] & \text{IF } \theta(X_1, \dots, X_k, Z) \text{ GOTO } E \\ & Z \leftarrow Z + 1 \\ & \text{GOTO } A_1 \end{cases}$$

verifica que $\text{dom}(\llbracket P \rrbracket^{(k)}) = \{\vec{x} : \exists t \theta(\vec{x}, t)\} = A$.

Predicados parcialmente decidibles

Los predicados recursivos (equivalentes a los GOTO-computables) se denominan también **decidibles**.

Definición. Un predicado θ es **parcialmente decidable** (p.d.) si el conjunto $A = \{\vec{x} : \theta(\vec{x})\}$ es r.e.

- ▶ Las propiedades de los conjuntos r. e. se trasladan de forma natural a los predicados p.d.

Proposición. Son equivalentes:

1. θ es un predicado parcialmente decidable de aridad k .
2. Existe un predicado recursivo $(k + 1)$ -ario θ' , tal que $\theta(\vec{x}) \equiv \exists t \theta'(\vec{x}, t)$.

Lema de la contracción. Si $\theta(\vec{x}, t)$ es p.d. entonces $\exists t \theta(\vec{x}, t)$ también es p.d.

Ejercicio. Si un conjunto es r.e, entonces la **cuantificación** (universal o existencial) **acotada** es, asimismo, r.e.

Teorema de Caracterización

Teorema. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. Son equivalentes:

1. A es recursivamente enumerable.
2. Existe g recursiva total tal que $A = \text{rang}(g)$.
3. Existe h recursiva tal que $A = \text{rang}(h)$.

(1) \implies (2) (teorema de enumeración):

Por el teorema de la proyección, existe un predicado recursivo, $\theta(x, z)$, tal que $A = \{x : \exists t \theta(x, t)\}$.

Como $A \neq \emptyset$, existe $x_0 \in A$. Se define:

$$f(u) = \begin{cases} l(u) & \text{si } \theta(l(u), r(u)) \\ x_0 & \text{e.c.o.c.} \end{cases}$$

Se tiene que f es recursiva, total y, además, $\text{rang}(f) = A$.

(3) \implies (1) (teorema del rango) :

Sea P tal que $h = \llbracket P \rrbracket^{(1)}$ y $A = \text{rang}(h)$. Sea $e = \#(P)$ y Q el siguiente programa:

```
[A1]  IF  $\neg$ STEP( $Z, e, Z_2$ ) GOTO  $A_2$ 
         $V \leftarrow h(Z)$ 
        IF  $V = X$  GOTO  $E$ 
[A2]   $Z \leftarrow Z + 1$ 
        IF  $Z \leq Z_2$  GOTO  $A_1$ 
         $Z_2 \leftarrow Z_2 + 1$ 
         $Z \leftarrow 0$ 
        GOTO  $A_1$ 
```

Por tanto, A es r.e. ya que $\text{dom}(\llbracket Q \rrbracket^{(1)}) = A$. ■

- **Nota:** Un conjunto no vacío, $A \subseteq \mathbb{N}$ es r.e. sii existe un programa P tal que A es el conjunto de todos los resultados de las computaciones $P(x)$, para cada $x \in \mathbb{N}$.

Teorema del grafo

Una función f es recursiva si y sólo si su grafo es un conjunto r.e.

\Rightarrow | La función

$$g(\vec{x}, y) = (\mu z)(|f(\vec{x}) - y| = 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(\vec{x}) = y \\ \uparrow & \text{e.c.o.c.} \end{cases}$$

verifica que $\text{dom}(g) = G(f)$.

\Leftarrow | Si $G(f)$ es r.e. existe un predicado recursivo $\theta(\vec{x}, y, t)$ tal que:

$$G(f) = \{(\vec{x}, y) : \exists t \theta(\vec{x}, y, t)\}$$

Entonces se verifica:

$$f(\vec{x}) = l((\mu u)\theta(\vec{x}, l(u), r(u)))$$

Por tanto, f es recursiva.

Teorema de definición por casos para funciones recursivas parciales

Teorema. Sean f_1, \dots, f_n funciones recursivas parciales de aridad $k \geq 1$. Sean A_1, \dots, A_n conjuntos recursivos que forman una partición de \mathbb{N}^k . Entonces la función:

$$g(\vec{x}) = \begin{cases} f_1(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in A_1 \\ \dots & \dots \\ f_n(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in A_n \end{cases}$$

es recursiva.

- Basta observar que:

$$(\vec{x}, y) \in G(g) \iff ((\vec{x}, y) \in G(f_1) \wedge \theta_1(\vec{x})) \vee \dots \vee ((\vec{x}, y) \in G(f_n) \wedge \theta_n(\vec{x}))$$



Problemas de decisión

Informalmente:

- ▶ Es un problema cuyas únicas posibles respuestas son **sí** y **no**.

Formalmente:

- ▶ Es un par ordenado $X = (E_X, \theta_X)$ en donde:
 - ▶ E_X es el conjunto de las instancias del problema.
 - ▶ θ_X es un predicado sobre E_X .

Todo problema de decisión $X = (E_X, \theta_X)$ tiene asociado un conjunto:

- ▶ $L_X = \{a \in E_X : \theta_X(a) = 1\}$.

Obsérvese que la relación de pertenencia del conjunto L_X es el predicado θ_X .

Decidibilidad de problemas de decisión

Un problema de decisión $X = (E_X, \theta_X)$ es:

- ▶ **decidible** (o **resoluble algorítmicamente**) si el conjunto L_X asociado al problema es recursivo.
- ▶ **indecidible** (o **irresoluble algorítmicamente**) si el conjunto L_X asociado al problema **no** es recursivo.
- ▶ **semidecidible** (o **parcialmente decidible**) si el conjunto L_X asociado al problema es recursivamente enumerable.

Equivalentemente, un problema de decisión $X = (E_X, \theta_X)$ es:

- ▶ **decidible** si el predicado θ_X es recursivo.
- ▶ **indecidible** si el predicado θ_X **no** es recursivo.
- ▶ **semidecidible** si el predicado θ_X es parcialmente decidible.

El problema de la parada (I)

Enunciado informal: Dado un programa $GOTO$, P , y un dato de entrada \vec{x} , determinar si P para sobre \vec{x} .

Cuestión informal: ¿Es resoluble algorítmicamente el problema de la parada?

Enunciado formal I: Dados dos números $x, y \in \mathbb{N}$ determinar si $\varphi_x^{(1)}(y) \downarrow$.

Enunciado formal II: El problema de la parada es $HALT = (\mathbb{N}^2, HALT(x, y))$, siendo $HALT(x, y) \equiv \varphi_x^{(1)}(y) \downarrow$.

Cuestión formal I: ¿Es recursivo el conjunto:

$$\mathcal{K}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : \varphi_x^{(1)}(y) \downarrow\}?$$

Cuestión formal II: ¿Es decidible el problema de la parada?

Proposición. El problema de la parada es indecidible pero, en cambio, es semidecidible.

- ▶ Hay que probar que el predicado $HALT(x, y) \equiv \varphi_x^{(1)}(y) \downarrow$ **no** es recursivo pero que, en cambio, **sí** es p.d.
- ★ Supongamos que $HALT(x, y) \equiv \varphi_x^{(1)}(y) \downarrow$ **fuese** recursivo. Entonces sería recursiva la función:

$$f(x) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } HALT(x, x) \\ 0 & \text{e.c.o.c.} \end{cases}$$

Sea e_0 tal que $f = \varphi_{e_0}^{(1)}$. Entonces

- $HALT(e_0, e_0)$ no puede ser verdadero.
- $HALT(e_0, e_0)$ no puede ser falso.

Lo que es una contradicción.

- ★ El predicado $HALT(x, y)$ es p.d. ya que

$$HALT(x, y) \iff \varphi_x^{(1)}(y) \downarrow \iff \exists t \text{ STEP}^{(1)}(y, x, t)$$

Observaciones

- ▶ El predicado $HALT(x, y) \equiv \varphi_x^{(1)}(y) \downarrow$ es p.d. pero **no** es recursivo.
- ▶ El conjunto $\mathcal{K}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : \varphi_x^{(1)}(y) \downarrow\}$ es r.e. pero **no** es recursivo.
- ▶ El conjunto $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x^{(1)}(x) \downarrow\}$ es r.e. pero **no** es recursivo.
- ▶ El conjunto $\overline{\mathcal{K}} = \mathbb{N} - \mathcal{K}$ **no** es r.e. (teorema del complemento).

\mathcal{K} : conjunto del problema de la parada.

El teorema de Rice

Sea \mathcal{F} una clase de funciones recursivas n -arias ($\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}^{(n)}$). Notaremos $I_{\mathcal{F}} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x^{(n)} \in \mathcal{F}\} \equiv \{\#(P) : \llbracket P \rrbracket^{(n)} \in \mathcal{F}\}$.

Enunciado del teorema de Rice: Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}^{(1)}$ tal que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}^{(1)}$. Entonces, el conjunto $I_{\mathcal{F}}$ **NO** es recursivo.

- ▶ El teorema de Rice proporciona un método para probar que un cierto conjunto A **no** es recursivo.
- ▶ ¿Cómo aplicarlo?
 - ★ Búsquese una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}^{(1)}$ tal que $I_{\mathcal{F}} = A$.
 - ★ Pruébese que $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
 - ★ Pruébese que $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}^{(1)}$.
 - ★ Concluir del teorema de Rice que el conjunto A **no** es recursivo.

Una demostración del teorema de Rice

Sean $f \in \mathcal{F}$, $g \notin \mathcal{F}$ y h_\emptyset la aplicación vacía.

Caso 1: Supongamos que $h_\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Para cada $a \in \mathbb{N}$, sea Q_a el programa:
$$\begin{cases} X_2 \leftarrow a \\ Z \leftarrow U(X_2, X_2) \\ Y \leftarrow f(X_1) \end{cases}$$

Entonces la función $G(a) = \#(Q_a)$ es recursiva. Se verifica:

$$a \in \mathcal{K} \Rightarrow U(a, a) \downarrow \Rightarrow \forall x (\llbracket Q_a \rrbracket(x) = f(x)) \Rightarrow \varphi_{G(a)} = f \Rightarrow G(a) \in I_{\mathcal{F}}$$

$$a \notin \mathcal{K} \Rightarrow U(a, a) \uparrow \Rightarrow \forall x (\llbracket Q_a \rrbracket(x) \uparrow) \Rightarrow \varphi_{G(a)} = h_\emptyset \Rightarrow G(a) \notin I_{\mathcal{F}}$$

Es decir: $a \in \mathcal{K} \iff G(a) \in I_{\mathcal{F}}$. Como \mathcal{K} **no** es recursivo, resulta que el conjunto $I_{\mathcal{F}}$ **no** es recursivo.

Caso 2: Supongamos que $h_\emptyset \in \mathcal{F}$.

Similar al caso anterior: tómesese g y $\mathcal{P}^{(1)} - \mathcal{F}$ en lugar de f y \mathcal{F} , resp.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la función $f(x) = x^2$, y

$$A = \{\#(P) : \llbracket P \rrbracket^{(1)} = f\}$$

Entonces, si $\mathcal{F} = \{f\}$ se tiene que $I_{\mathcal{F}} = A$. Obviamente,

- ▶ \mathcal{F} no es vacía ya que $f \in \mathcal{F}$.
- ▶ $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}^{(1)}$, pues, por ejemplo, la función nula $\mathcal{O} \in \mathcal{P}^{(1)}$, pero $\mathcal{O} \notin \mathcal{F}$

Del teorema de Rice, se deduce que el conjunto A no es recursivo.

Teorema de recursión

Sea $g : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ recursiva. Existe $e \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n \left(\varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = g(e, x_1, \dots, x_n) \right)$$

Demostración: En efecto, sea h la función recursiva:

$$h(x_1, \dots, x_n, v) = g(S_n^1(v, v), x_1, \dots, x_n)$$

Sea e_0 tal que $h = \varphi_{e_0}^{(n+1)}$.

$$g(S_n^1(v, v), x_1, \dots, x_n) = \varphi_{e_0}^{(n+1)}(\vec{x}, v) = \varphi_{S_n^1(e_0, v)}^{(n)}(\vec{x})$$

Tomando $v = e_0$, $e = S_n^1(e_0, e_0)$ se tiene que

$$g(e, x_1, \dots, x_n) = g(S_n^1(e_0, e_0), x_1, \dots, x_n) = \varphi_{e_0}^{(n+1)}(\vec{x}, e_0) = \varphi_{S_n^1(e_0, e_0)}^{(n)}(\vec{x}) = \varphi_e^{(n)}(\vec{x})$$

Teorema del punto fijo de Kleene

Sean $n \geq 1$ y $f \in \mathcal{R}^{(1)}$. Existe $e \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_{f(e)}^{(n)} = \varphi_e^{(n)}$.

Demostración: Sea g la función $(n + 1)$ -aria definida como sigue:

$$g(z, \vec{x}) = \mathcal{U}_n(\vec{x}, f(z)) = \varphi_{f(z)}^{(n)}(\vec{x})$$

La función g es recursiva. Luego, por el teorema de recursión existe $e \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall x \left(g(e, \vec{x}) = \varphi_e^{(n)}(\vec{x}) \right)$$

Por tanto, para toda $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$

$$\varphi_e^{(n)}(\vec{x}) = g(e, \vec{x}) = \varphi_{f(e)}^{(n)}(\vec{x})$$

(Este resultado se generaliza a aridad n : $\varphi_{f(e)}^{(n)} = \varphi_e^{(n)}$)