Tema III: Complejidad computacional en modelos celulares

Se trata de ofrecer soluciones alternativas a problemas computacionalmente duros.

- Las máquinas de Turing no deterministas proporcionan soluciones polinomiales pero dichas máquinas **no** son fiables:
  - dada una instancia del problema
    - alguna computación puede aceptar, otra puede rechazar e, incluso, otra puede no parar.
- Los sistemas P son máquinas no deterministas, por ello hemos de presentar alguna novedad respecto de las MTND's.
  - Exigiremos que los sistemas P que resuelvan problemas sean confluentes: todas las computaciones del sistema deben tener la misma salida.

Sistemas celulares con entrada

Es una tupla (Π, Σ, i_Π), tal que:

- Π es un sistema P de transición, con alfabeto de trabajo Γ, con p membranas etiquetadas por $1, \ldots, p$, y multiconjuntos iniciales $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_p$ asociados a cada una de ellas.
- Σ es un alfabeto (de entrada) estrictamente contenido en Γ.
- $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_p$ son multiconjuntos sobre $\Gamma - \Sigma$.
- i_Π es la etiqueta de una membrana distinguida (membrana de entrada).

Si m es un multiconjunto sobre Σ, entonces la *configuración inicial de* (Π, Σ, i_Π) *con entrada* m es $(\mu, \mathcal{M}_1, ..., \mathcal{M}_{i_\Pi} + m, ..., \mathcal{M}_p)$.

Las computaciones en un sistema celular con entrada asociada a un multiconjunto de entrada, se definen de manera análoga al caso general.

Sistemas celulares con salida externa

Son sistemas P cuyas salidas/resultados están codificados en el entorno de la estructura de membranas.

La membrana piel de una estructura de membranas (*skin*) aísla a la estructura de su entorno (*env*).

Sea $\mu = (V(\mu), E(\mu))$ una estructura de membranas.

- La *estructura de membranas con entorno* asociada a μ es el árbol enraizado $Ext(\mu)$ donde:
  - Su raíz es el nodo *env*.
  - $V(Ext(\mu)) = V(\mu) \cup \{env\}$
  - $E(Ext(\mu)) = E(\mu) \cup \{\{env, skin\}\}$

Es decir, se ha añadido un nuevo nodo (*env*) que sólo es adyacente a la piel, mientras que la estructura de membranas original permanece inalterada.

Un *sistema P de transición con salida externa* es un par $(\Pi, \mathcal{M}_e)$, en donde Π es un sistema P de transición y $\mathcal{M}_e = \emptyset$ es el multiconjunto que representa el contenido del entorno.

Sea $(\Pi, \mathcal{M}_e)$ un sistema P de transición con salida externa. Una configuración del sistema es un par $C = \big(Ext(\mu), M\big)$ tal que:

- $\mu = (V(\mu), E(\mu))$ es una estructura de membranas.
- $Ext(\mu)$ es la estructura de membranas con entorno asociada a μ.
- El conjunto $V(\mu)$ de nodos de μ está incluido en el conjunto $V(\mu_\Pi)$ de nodos de μ_Π, y contiene la raíz de μ_Π.
- Las raíces de ambas estructuras de membranas coinciden.
- M es una aplicación de dominio $V(Ext(\mu))$ y rango contenido en $\mathbf{M}(\Gamma)$.

Notaremos por $C = (\mu, M_{env}, M_{i_1}, \dots, M_{i_q})$ una configuración de Π, donde $V(\mu) = \{i_1, \dots, i_q\}$, $M_{env} = M(env)$ es el multiconjunto asociado al entorno de μ, y $M_{i_j} = M(i_j)$ es el multiconjunto asociado a la membrana i_j de μ, para cada $j = 1, \dots, q$.

Sea $(\Pi, \mathcal{M}_e)$ un sistema P de transición con salida externa, cuyos multiconjuntos iniciales son $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_p$.

- Si Π no posee membrana de entrada, entonces existe una única configuración inicial del sistema, a saber

$$C^0 = (\mu_\Pi, \emptyset, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_p)$$

- Si Π posee membrana de entrada, entonces para cada multiconjunto $m \in \mathbf{M}(\Sigma)$ existe una configuración inicial , a saber

$$C^0(m) = (\mu_\Pi, \emptyset, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{im} + m, \ldots, \mathcal{M}_p)$$

Entonces se define de manera usual el concepto de paso de transición y computación del sistema celular.

Sistemas celulares reconocedores

Es un sistema P con salida externa tal que:

- El alfabeto de trabajo tiene dos elementos distinguidos: *yes*, *no*.
- Todas las computaciones del sistema son de parada.
- Si $\mathcal{C}$ es una computación del sistema, entonces o bien algún objeto *yes* o bien algún objeto *no* (pero no ambos) son enviados al entorno (y, únicamente, en el último paso de la computación).

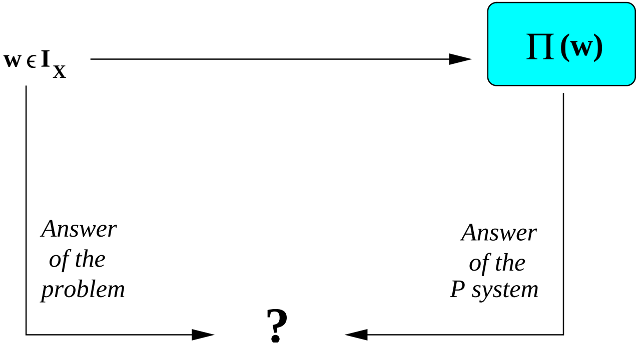
Se define la función *Output* sobre el conjunto de las computaciones de Π:

$$Output(\mathcal{C}) = \begin{cases} yes & , \text{si } yes \in M_{env} \\ no & , \text{si } yes \notin M_{env} \end{cases}$$

$\mathcal{C}$ es de *aceptación* (resp. de *rechazo*) si el objeto *yes* (resp. *no*) aparece en el entorno asociado a la correspondiente configuración de parada de $\mathcal{C}$.

Notaremos por $\mathcal{R}$ la clase de los sistemas P reconocedores de lenguajes.

Soluciones semi–uniformes



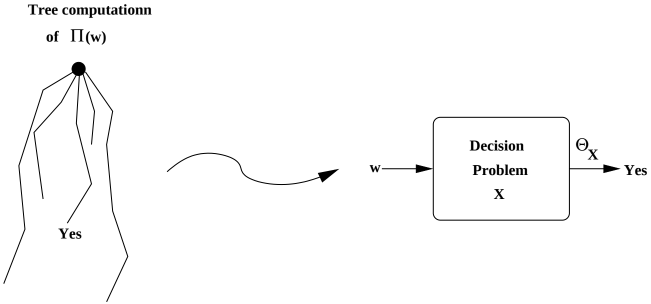
Soluciones semi–uniformes

Un problema de decisión $X = (I_X, \theta_X)$ es resoluble en tiempo polinomial de manera semi–uniforme por una familia $\mathbf{\Pi} = \big(\Pi(w)\big)_{w \in I_X}$ de sistemas P reconocedores sin entrada (y notaremos $X \in \mathbf{PMC}^*_{\mathcal{R}}$), si se verifica:

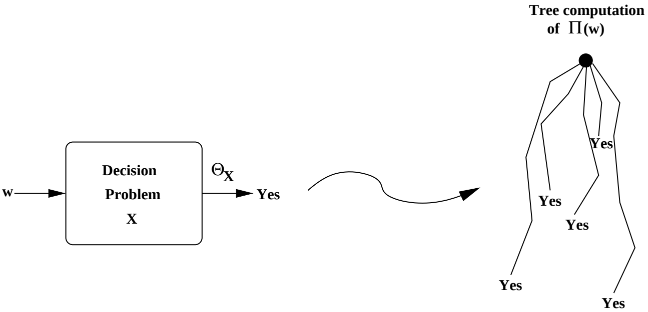
1. $\mathbf{\Pi}$ es polinomialmente uniforme por máquinas de Turing: existe una MTD que trabaja en tiempo polinomial y construye $\Pi(w)$ a partir de $w \in I_X$.
2. $\mathbf{\Pi}$ está polinomialmente acotada respecto de X: existe un polinomio $q(n)$ tal que para cada $w \in I_X$, toda computación de $\Pi(w)$ para en, a lo sumo, $q(|w|)$ pasos.
3. $\mathbf{\Pi}$ es adecuada, respecto de X: para cada $w \in I_X$, si existe una computación de $\Pi(w)$ que es de aceptación, entonces $\theta_X(w) = 1$.
4. $\mathbf{\Pi}$ es completa, respecto de X: para cada $w \in I_X$, si $\theta_X(w) = 1$, entonces toda computación de $\Pi(w)$ es de aceptación.

La clase $\mathbf{PMC}^*_{\mathcal{R}}$ es cerrada bajo reducibilidad en tiempo polinomial y bajo complementario.

Adecuación:



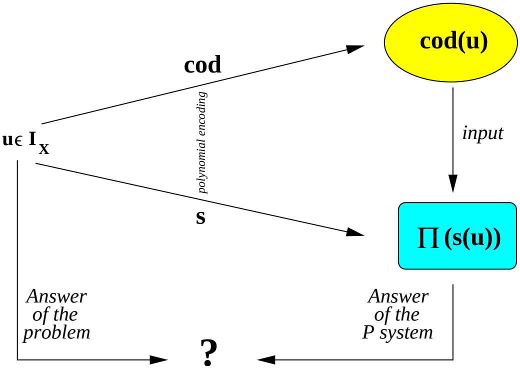
Completitud:



Soluciones uniformes

Una codificación polinomial (cod, s) de I_X en $\mathbf{\Pi}$ es un par de funciones computables en tiempo polinomial tales que para cada $w \in I_X$ se tiene:

- $s(w)$ es un número natural.
- $cod(w)$ es un multiconjunto de entrada del sistema $\Pi(s(w))$.



Soluciones uniformes

Un problema de decisión $X = (I_X, \theta_X)$ es resoluble en tiempo polinomial de manera uniforme por una familia $\mathbf{\Pi} = \big(\Pi(n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ de sistemas P reconocedores con entrada (y notaremos $X \in \mathbf{PMC}_{\mathcal{R}}$), si se verifica:

1. $\mathbf{\Pi}$ es polinomialmente uniforme por máquinas de Turing: existe una MTD que trabaja en tiempo polinomial y construye $\Pi(n)$ a partir de n.
2. Existe una codificación polinomial (cod, s) de I_X en $\mathbf{\Pi}$ tal que:
   - $\mathbf{\Pi}$ está polinomialmente acotada respecto de (X, cod, s): existe un polinomio $q(n)$ tal que para cada $w \in I_X$, toda computación de $\Pi(s(w))$ con entrada $cod(w)$ para en, a lo sumo, $q(|w|)$ pasos.
   - $\mathbf{\Pi}$ es adecuada, respecto de (X, cod, s): para cada $w \in I_X$, si existe una computación de $\Pi(s(w))$ con entrada $cod(w)$ que es de aceptación, entonces $\theta_X(w) = 1$.
   - $\mathbf{\Pi}$ es completa, respecto de (X, cod, s): para cada $w \in I_X$, si $\theta_X(w) = 1$ entonces toda computación de $\Pi(s(w))$ con entrada $cod(w)$ es de aceptación.

La clase $\mathbf{PMC}_{\mathcal{R}}$ es cerrada bajo reducibilidad en tiempo polinomial y bajo complementario.

Caracterización de la clase P mediante sistemas celulares

Definición: Sea M una MT con alfabeto de entrada Σ_M. El *problema de decisión asociado a M* es $X_M = (I, \theta)$, en donde:

- $I = \Sigma_M^*$
- Para cada $w \in \Sigma_M^*$, $\theta(w) = 1$ si y sólo si M acepta w.

Definición: Una máquina de Turing M es simulada en tiempo polinomial por una familia $\mathcal{R}$ de sistemas P reconocedores, si $X_{TM} \in \mathbf{PMC}_{\mathcal{R}}$.

Sistema P básico de transición: sólo admite reglas del tipo:

- Evolución.
- Comunicación.
- Disolución.

Proposición: [1]:

Cada MTD que trabaja en tiempo polinomial puede ser simulada en tiempo polinomial por una familia de sistemas P básicos de transición reconocedores.

Proposición: [2]:

Si un problema de decisión es resoluble en tiempo polinomial por una familia de de sistemas P básicos de transición reconocedores, entonces existe una MTD que resuelve el problema y trabaja en tiempo polinomial

Proposition[3]: Si $\mathcal{T}$ es la clase de los sistemas P básicos de transición reconocedores, entonces $\mathbf{P} = \mathbf{PMC}_{\mathcal{T}} = \mathbf{PMC}^*_{\mathcal{T}}$.

---

[1] M.J. Pérez–Jiménez, A. Romero–JIménez, F. Sancho–Caparrini. The P versus NP problem through cellular computing with membranes. In N. Jonoska, Gh. Paun, Gr. Rozenberg (eds.) *Aspects of Molecular Computing*, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2950 (2004), 338-352.

[2] C. Zandron, C. Ferretti, G. Mauri. Solving NP–complete problems using P systems with active membranes. In I. Antoniou, C. Calude, M.J. Dinneen (eds.) *Unconventional Models of Computation*, Springer–Verlag, 2000–289–301.

[3] M.A. Gutiérrez–Naranjo, M.J. Pérez–Jiménez, A. Riscos–Núñez, F.J. Romero–Campero, A. Romero Jiménez. Characterizing tractability by cell–like membrane systems. In K.G. Subramanian ed. *Formal Models, Languages and Applications*, World Scientific,Series in Machine Perception and Artificial Intelligence - Vol. 66, 2006, chapter 9, pp. 137–154.

Teorema: Son equivalentes:

(1) $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

(2) Existe un problema de decisión **NP**–completo que es irresoluble en tiempo polinomial por una familia de de sistemas P básicos de transición reconocedores.

(3) Cualquier problema de decisión **NP**–completo es irresoluble en tiempo polinomial por una familia de de sistemas P básicos de transición reconocedores.