

Tema IV: Resolución eficiente de problemas NP-completos en modelos celulares

Recordemos que los sistemas P básicos de transición reconocedores:

- ▶ Sólo permiten reglas de **evolución**, **comunicación** y **disolución**.
- ▶ La estructura de membranas usada en cualquier computación del sistema nunca pueden aumentar de tamaño.
- ▶ El número de objetos utilizados en alguna computación puede ser de tamaño exponencial.
- ▶ Sólo pueden resolver en tiempo polinomial problemas tratables.

Para poder resolver problemas **computacionalmente duros** en tiempo polinomial mediante sistemas P reconocedores

- ▶ ¿Será suficiente poder usar un número exponencial de membranas?

La mitosis celular

El **ciclo celular**: tras su nacimiento la célula desarrolla cuatro fases

- ▶ Fase 1: Crecimiento.
- ▶ Fase 2: Replicación.
- ▶ Fase 1: crecimiento.
- ▶ Fase 1: División celular.

Esta operación puede ser formalizada en los sistemas P a través de una regla de *división de membranas*:

- ▶ un objeto a situado en una membrana etiquetada por h provoca la división de la misma en otras dos, en la que se replican los objetos, con excepción de a que, en la primera, evoluciona a b y en la segunda, a c .
- ▶ $[a]_h \rightarrow [b]_h [c]_h$.

La aplicación de un número **polinomial** de veces de esta regla produce un número **exponencial** de membranas en el sistema.

Sistemas P con membranas activas y polarizaciones

Es un sistema P que permite sólo el uso de los siguientes tipos de reglas:

(a) $[a \rightarrow u]_h^\alpha$ (evolución)

(b) $a []_h^{\alpha_1} \rightarrow [b]_h^{\alpha_2}$ (comunicación hacia dentro)

(c) $[a]_h^{\alpha_1} \rightarrow b []_h^{\alpha_2}$ (comunicación hacia fuera)

(d) $[a]_h^\alpha \rightarrow b$ (disolución)

(e) $[a]_h^{\alpha_1} \rightarrow [b]_h^{\alpha_2} [c]_h^{\alpha_3}$ (división membranas elementales)

en donde $h \in H$, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{+, -, 0\}$, $a, b, c \in \Sigma$ y $u \in \Sigma^*$.

Sea $\mathcal{AM}$ la clase de los sistemas P reconocedores con membranas activas y polarizaciones tales que sólo permiten reglas de división de membranas elementales.

Las reglas se aplicarán de acuerdo con los siguientes principios:

- ▶ Las reglas del tipo (b) hasta (e) se aplican a una membrana de manera **secuencial**: una, a lo sumo, en cada paso.
- ▶ Una regla de evolución se puede aplicar a una membrana, a la vez que alguna de las del tipo (b) hasta (e).
- ▶ Si una membrana es disuelta, su contenido pasa a formar parte de la membrana (no disuelta) inmediatamente exterior.
- ▶ La membrana piel no se puede dividir ni disolver.
- ▶ Las reglas asociadas a una etiqueta i se pueden usar para todas las membranas que tengan dicha etiqueta.
- ▶ Todos los objetos no especificados en ninguna de las reglas que se aplican, permanecerán inalterados.

Los sistemas P con membranas activas introducidos:

- ▶ Admiten tres cargas eléctricas.
- ▶ Las reglas están asociadas a etiquetas.
- ▶ La aplicación de una regla no produce cambios de etiquetas.
- ▶ La aplicación de una regla puede producir cambios en las polarizaciones.
- ▶ No admiten cooperación.
- ▶ No existen prioridades.
- ▶ La parte derecha de una regla sólo puede contener una cadena en las reglas de evolución.

Una solución uniforme del problema SAT en tiempo lineal

Para cada $(n, m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, sea $\langle n, m \rangle = ((m + n)(m + n + 1)/2) + m$.
Entonces, se define el sistema

$$\Pi(\langle n, m \rangle) = (\Gamma, \Sigma, L, \mu, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, R, i_0)$$

como sigue:

- ▶ $\Gamma(m, n) = \Sigma(m, n) \cup \{c_k : 1 \leq k \leq m + 2\} \cup \{d_k : 1 \leq k \leq 3n + 2m + 3\} \cup \{r_{i,k} : 0 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq 2n\} \cup \{e, t\} \cup \{\text{Yes}, \text{No}\}.$
- ▶ $\Sigma(m, n) = \{x_{i,j}, \bar{x}_{i,j} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$
- ▶ $L = \{1, 2\}.$
- ▶ $\mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}_2^0 \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_1^0$ (las membranas etiquetadas por 2 las denominamos *internas*).
- ▶ $\mathcal{M}_1 = \emptyset, \mathcal{M}_2 = \{d_1\}.$
- ▶ $i_0 = 2.$
- ▶ El conjunto R de reglas es el siguiente:

- (a) $[d_k]_2^0 \rightarrow [d_k]_2^+ [d_k]_2^- : 1 \leq k \leq n.$
- (b) $[x_{i,1} \rightarrow r_{i,1}]_2^+, [\bar{x}_{i,1} \rightarrow r_{i,1}]_2^- : 1 \leq i \leq m.$
 $[x_{i,1} \rightarrow \lambda]_2^-, [\bar{x}_{i,1} \rightarrow \lambda]_2^+ : 1 \leq i \leq m.$
- (c) $[x_{i,j} \rightarrow x_{i,j-1}]_2^+, [x_{i,j} \rightarrow x_{i,j-1}]_2^- : 1 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq n.$
 $[\bar{x}_{i,j} \rightarrow \bar{x}_{i,j-1}]_2^+, [\bar{x}_{i,j} \rightarrow \bar{x}_{i,j-1}]_2^- : 1 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq n.$
- (d) $[d_k]_2^+ \rightarrow []_2^0 d_k, [d_k]_2^- \rightarrow []_2^0 d_k : 1 \leq k \leq n.$
 $d_k []_2^0 \rightarrow [d_{k+1}]_2^0 : 1 \leq k \leq n-1.$
- (e) $[r_{i,k} \rightarrow r_{i,k+1}]_2^0 : 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq 2n-1.$
- (f) $[d_k \rightarrow d_{k+1}]_1^0 : n \leq k \leq 3n-3; [d_{3n-2} \rightarrow d_{3n-1}e]_1^0.$
- (g) $e[]_2^0 \rightarrow [c_1]_2^+.$
- (h) $[d_k \rightarrow d_{k+1}]_1^0 : 3n-1 \leq k \leq 3n+2m+2.$
- (i) $[r_{1,2n}]_2^+ \rightarrow []_2^- r_{1,2n}.$
- (j) $[r_{i,2n} \rightarrow r_{i-1,2n}]_2^- : 1 \leq i \leq m.$
- (k) $r_{1,2n}[]_2^- \rightarrow [r_{0,2n}]_2^+.$
- (l) $[c_k \rightarrow c_{k+1}]_2^- : 1 \leq k \leq m.$
- (m) $[c_{m+1}]_2^+ \rightarrow []_2^+ c_{m+1}.$
- (n) $[c_{m+1} \rightarrow c_{m+2}t]_1^0.$
- (o) $[t]_1^0 \rightarrow []_1^+ t.$
- (p) $[c_{m+2}]_1^+ \rightarrow []_1^- \text{Yes}.$
- (q) $[d_{3n+2m+3}]_1^0 \rightarrow []_1^+ \text{No}.$

Veamos que la familia $\Pi = \{\Pi(t) : t \in \mathbf{N}\}$ proporciona una solución lineal uniforme del problema **SAT**.

Consideramos la **codificación polinomial** (cod, s) de I_{SAT} en la familia Π .

- ▶ Para cada fórmula $\varphi = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$ en FNC con $Var(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$:
 - ▶ $s(\varphi) = \langle n, m \rangle$, siendo $\langle n, m \rangle = ((m + n)(m + n + 1)/2) + m$.
 - ▶ $cod(\varphi) = \{x_{i,j} : x_j \in C_i\} \cup \{\bar{x}_{i,j} : \neg x_j \in C_i\}$

La función s es primitiva recursiva, computable en tiempo polinomial y biyectiva de $\mathbf{N}^2$ en $\mathbf{N}$.

La función cod es computable en tiempo polinomial y para cada $\varphi \in I_{SAT}$, se tiene que $cod(\varphi)$ es un multiconjunto de entrada del sistema $\Pi(s(\varphi))$.

Si $\mathcal{C}$ es la computación del sistema $\Pi(s(\varphi))$ con entrada $cod(\varphi)$, notaremos por $\mathcal{C}^i$ la configuración obtenida tras ejecutar i pasos de $\mathcal{C}$.

La ejecución del sistema $\Pi(s(\varphi))$ con entrada $cod(\varphi)$ se estructura en cuatro etapas:

- ▶ La etapa de *generación* halla todas las posibles valoraciones (en las membranas internas).
 - ▶ La presencia de d_i ($1 \leq i \leq n$) en la piel indica que se han generado todas las posibles valoraciones de $\{x_1, \dots, x_i\}$.
 - ▶ Simultáneamente, en cada membrana interna aparecerán todas las cláusulas verdaderas por la valoración parcial que codifica esa membrana (mediante los objetos $r_{i,k}$).
 - ▶ Finaliza cuando el objeto d_n aparece en la piel.
- ▶ La etapa de *sincronización* pone los segundos índices de $r_{i,k}$ iguales a $2n$.
 - ▶ En cada paso de esta etapa, d_i ($n \leq i \leq 3n - 1$) evoluciona a d_{i+1} .
 - ▶ Finaliza cuando los objetos d_{3n} aparecen en la piel (momento en que cada membrana interna tiene una carga $+$ y contiene c_1).
- ▶ La etapa de *chequeo* determina el número de cláusulas verdaderas que hay en cada membrana interna.
 - ▶ La presencia de c_i en una membrana interna prueba que las cláusulas $C_1, \dots, C_{i-1}$ son verdaderas por la valoración codificada.
 - ▶ Para cada c_i (with $1 \leq i \leq m$), el objeto c_{i+1} aparece en *alguna* membrana tras ejecutar 2 pasos.
 - ▶ Finaliza cuando el objeto d_{3n+2m} aparece en la piel.
- ▶ La etapa de *salida* produce la respuesta del sistema.
 - ▶ La salida *Yes* se produce si aparece el objeto c_{m+1} en alguna membrana interna de $C^{5n+2m-1}$. Entonces, el sistema devuelve *Yes* tras 4 pasos.
 - ▶ La salida *No* se produce si ningún objeto c_{m+1} aparece en ninguna membrana interna de $C^{5n+2m-1}$. Entonces, después de 4 pasos el sistema devuelve *No*.

- ▶ Π es polinomialmente uniforme por MT pues las reglas están descritas recursivamente y la cantidad de recursos usados para su construcción es:
 - ▶ Número total de **objetos**: $4mn + 3m + 5n + 9 \in \Theta(m \cdot n)$
 - ▶ Número de **membranas iniciales**: 2.
 - ▶ Máximo **cardinal** de los **multiconjuntos iniciales**: 1.
 - ▶ Número total de **reglas**: $6mn + 3m + 6n + 10 \in \Theta(m \cdot n)$.
 - ▶ Máxima **longitud** de una **regla**: 9.
- ▶ Π es polinomialmente acotada con respecto a (cod, s) : el tiempo de ejecución de $\Pi(s(\varphi))$ con entrada $cod(\varphi)$ es:
 - ▶ $3n - 1$ pasos en la fase de **generación**.
 - ▶ $2n$ pasos en la fase de **sincronización**.
 - ▶ $2m$ pasos en la fase de **chequeo**.
 - ▶ 4 pasos en la fase de **salida**.

Tiempo total de ejecución: $\Pi(s(\varphi))$ con entrada $cod(\varphi)$ es $5n + 2m + 3 \in \Theta(n + m)$.

- ▶ Cada sistema de la familia Π es determinista.
- ▶ Π es adecuada y completa respecto a $(\mathbf{SAT}, cod, s)$,
 - ▶ Si alguna membrana interna de $\mathcal{C}^{5n+2m-1}$ contiene un objeto c_{m+1} , entonces en el último paso el sistema envía un objeto *Yes* al entorno.
 - ▶ Si ninguna membrana interna de $\mathcal{C}^{5n+2m-1}$ contiene un objeto c_{m+1} , entonces en el último paso el sistema envía un objeto *No* al entorno.
 - ▶ Si la computación de $\Pi(s(\varphi))$ con entrada $cod(\varphi)$ es de aceptación, entonces la fórmula φ es satisfactible (**Adecuación**).
 - ▶ Si la la fórmula φ es satisfactible, entonces la computación de $\Pi(s(\varphi))$ con entrada $cod(\varphi)$ es de aceptación (**Compleitud**).

Teorema 3: $\mathbf{SAT} \in \mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}}$.

Corolario: $\mathbf{NP} \cup \mathbf{co-NP} \subseteq \mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}}$.

Otros resultados interesantes

Sea $\mathcal{AM}(+ne)$ la clase de los sistemas P reconocedores con membranas activas y polarizaciones que permiten reglas de división de membranas elementales y no elementales.

Proposition¹: $\mathbf{PSPACE} \subseteq \mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}(+ne)}^*$

Proposition²: We have the following

- ▶ $\mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}(+ne)} \subseteq \mathbf{EXSPACE}$
- ▶ $\mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}(+ne)} \subseteq \mathbf{EXPTIME}$

Proposition³: $\mathbf{PSPACE} = \mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}(+ne)}$

El marco de los sistemas P con membranas activas y polarizaciones parece ser demasiado potente desde el punto de vista de la eficiencia computacional.

¹P. Sosik. The computational power of cell division: beating down parallel computer? *Natural Computing*, 2, 3 (2003), 287–298.

²A.E. Porreca, G. Mauri, C. Zandron. Complexity classes for membrane systems, *Theoretical Informatics Applied*, 40 (2006), 141–162.

³P. Sosik, A. Rodríguez-Patón. Membrane Computing and Complexity Theory: A characterization of PSPACE, *Journal of Computer and System Sciences*, 73, 1 (2007), 137–152

Variantes de sistemas P con membranas activas

Se han obtenido soluciones eficientes de problemas computacionalmente duros en los siguientes marcos de sistemas P con membranas activas:

- ▶ Usando sólo **dos** polarizaciones.
 - ▶ Sólo división de membranas elementales, sin cooperación, sin prioridades y sin cambios de etiquetas⁴
- ▶ Eliminando las polarizaciones
 - ▶ Sólo división de membranas elementales, sin cooperación, sin prioridades y sin cambios de etiquetas pero usando catalizadores bi-estables⁵
 - ▶ Sólo división de membranas elementales pero con cambios de etiquetas, sin cooperación y sin prioridades⁶

⁴ A. Riscos-Núñez, *Programación celular: Resolución eficiente de problemas numéricos NP-completos*. PhD. Thesis, University of Seville, Spain, 2004.

⁵ M.J. Pérez-Jiménez, F.J. Romero-Campero, Trading polarizations for bi-stable catalysts in P systems with active membranes. *Lecture Notes in Computer Science*, **3365** (2005), 373–388.

⁶ A. Alhazov, L. Pan, Gh. Păun, Trading polarizations for labels in P systems with active membranes. *Acta Informatica*, **41** (2004) 111–144.

Sistemas P con membranas activas y sin polarizaciones

Las reglas que se permiten son las siguientes:

- (a) $[a \rightarrow u]_h$: (evolución)
- (b) $a []_h \rightarrow [b]_h$: (comunicación hacia dentro)
- (c) $[a]_h \rightarrow b []_h$: (comunicación hacia fuera)
- (d) $[a]_h \rightarrow b$: (disolución)
- (e) $[a]_h \rightarrow [b]_h [c]_h$: (división membranas elementales)
- (f) $[[]_{h_1} []_{h_2}]_{h_0} \rightarrow [[]_{h_1}]_{h_0} [[]_{h_2}]_{h_0}$: (división membranas no elementales)

La semántica de la aplicación de las reglas siguen los mismos principios que los sistemas P con membranas activas y polarizaciones (incluyendo la regla del tipo (f) entre las de aplicación *secuencial*).

Sean $\alpha \in \{-d, +d\}$ y $\beta \in \{-ne, +ne\}$.

$\mathcal{AM}^0(\alpha, \beta)$: clase de los sistemas P reconocedores con membranas activas y sin polarizaciones tales que:

- ▶ $\alpha = +d$: se permiten reglas de disolución.
- ▶ $\alpha = -d$: se prohíben reglas de disolución.
- ▶ $\beta = -ne$: sólo se permiten reglas de división de membranas elementales.
- ▶ $\beta = +ne$: se permiten reglas de división de membranas elementales y no elementales.

Propiedades inmediatas:

- ▶ $\text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(\alpha, \beta)} \subseteq \text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(\alpha, \beta)}^*$
- ▶ $\text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(\alpha, -ne)} \subseteq \text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(\alpha, +ne)}$
- ▶ $\text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(\alpha, -ne)}^* \subseteq \text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(\alpha, +ne)}^*$
- ▶ $\text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(-d, \beta)} \subseteq \text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(+d, \beta)}$
- ▶ $\text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(-d, \beta)}^* \subseteq \text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(+d, \beta)}^*$

Conjetura de Păun (2005):

A comienzos de 2005, Gh. Păun (problema F^7) escribió:

My favorite question (related to complexity aspects in P systems with active membranes and with electrical charges) is that about the number of polarizations. Can the polarizations be completely avoided? The feeling is that this is not possible – and such a result would be rather sound: passing from no polarization to two polarizations amounts to passing from non–efficiency to efficiency.

Formalmente se puede formular la conjetura de Păun así:

La clase de todos los problemas de decisión resolubles en tiempo polinomial por sistemas P reconocedores con membranas activas y sin polarizaciones es igual a la clase P .

Conjetura de Păun: $P = \mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}^0(+d, -ne)} = \mathbf{PMC}^*_{\mathcal{AM}^0(+d, -ne)}$.

⁷Gh. Păun. Further twenty six open problems in membrane computing. In M.A. Gutiérrez, A. Riscos, F.J. Romero, D. Sburlan (eds.) *Proceedings of the Third Brainstorming Week on Membrane Computing*, Fénix Editora, Sevilla, 2005, 249-262

Una solución parcial afirmativa a la conjetura de Păun

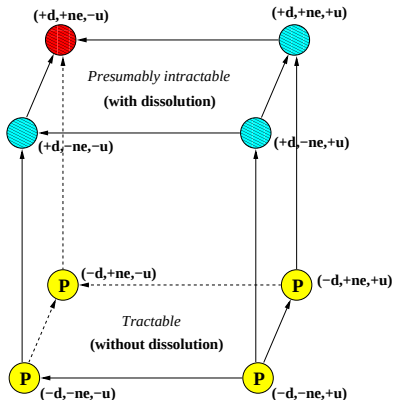
Teorema: ⁸: $\mathbf{P} = \mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}^0(-d,\beta)} = \mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}^0(-d,\beta)}^*$, para cada $\beta \in \{-ne, +ne\}$.

⁸M.A. Gutiérrez–Naranjo, M.J. Pérez–Jiménez, A. Riscos–Núñez, F.J. Romero–Campero. P systems with active membranes, without polarizations and without dissolution: A characterization of P. *Lecture Notes in Computer Science*, **3699** (2005), 105–116.

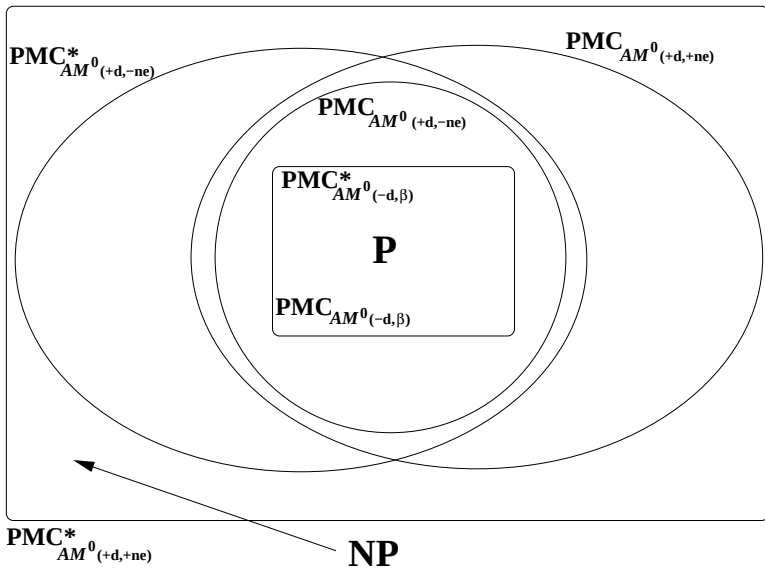
Una solución parcial negativa a la conjetura de Păun

Teorema: ⁹: Se verifica:

- ▶ $\text{SAT} \in \text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(+d,+ne)}^*$
- ▶ $\text{NP} \cup \text{co-NP} \subseteq \text{PMC}_{\mathcal{AM}^0(+d,+ne)}^*$

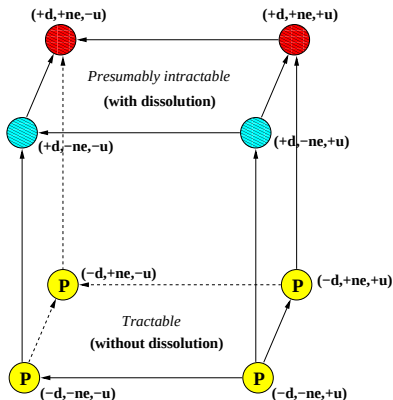


⁹ M.A. Gutiérrez-Naranjo, M.J. Pérez-Jiménez, A. Riscos-Núñez, F.J. Romero-Campero. On the power of dissolution in P systems with active membranes. *Lecture Notes in Computer Science*, **3850** (2006), 224-240.

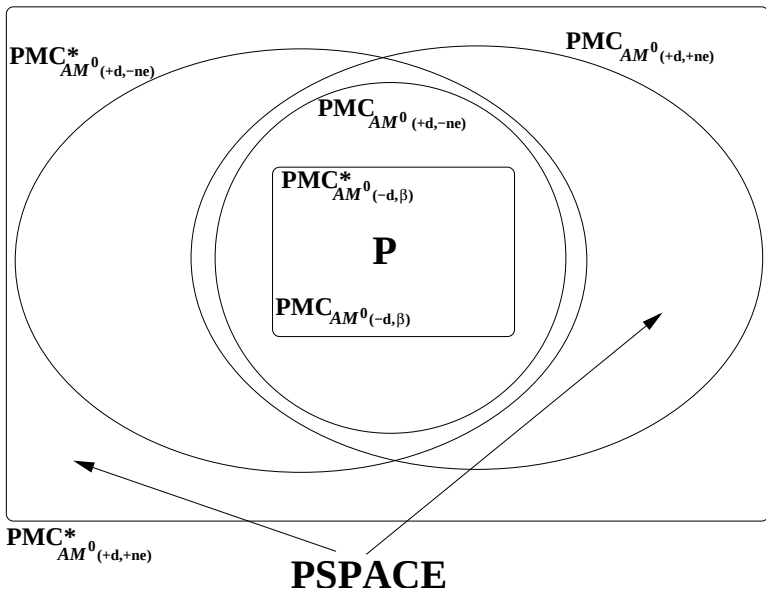


Teorema: ¹⁰: Se verifica:

- ▶ $\text{QSAT} \in \text{PMC}^*_{\mathcal{AM}^0(+d,+ne)}$.
- ▶ $\text{PSPACE} \subseteq \text{PMC}^*_{\mathcal{AM}^0(+d,+ne)}$.



¹⁰ A. Alhazov, M.J. Pérez-Jiménez. Uniform solution to QSAT using polarizationless active membranes. Lecture Notes in Computer Science, **4664** (2007), 122–133.



Cuestiones interesantes

Estudiar la resolubilidad eficiente de problemas **NP**–completos en sistemas P reconocedores con membranas activas [sin polarizaciones](#) y [con reglas de disolución](#) en los siguientes marcos:

- ▶ Sólo reglas de división.
- ▶ Sólo reglas de división y comunicación.
- ▶ Sólo reglas de división y evolución.
- ▶ Reglas de división sólo para membranas elementales.
- ▶ Reglas de división del tipo $[a]_h \rightarrow [b]_h [u]_h$ para membranas elementales y/o no elementales, pero en donde la *segunda* membrana creada **sólo** contiene a la cadena u (es decir, sólo hay replicación de objetos en la primera membrana).