ALGEBRA II. TEORÍA DE CONJUNTOS. (14–Diciembre–1999)

Nombre y Apellidos ....

Ejercicio 1.– Demostrar o refutar:

(a) La clase $A = \{x : \ \mathbf{P}(x) \ \text{ es un conjunto transitivo}\}$ es propia.

(b) La clase $A = \{x : \ \mathbf{P}(x) \ \text{ es un ordinal}\}$ es propia.

(c) Si $f : \omega \to \omega$ es creciente y tiene infinitos puntos fijos, entonces $f = I_\omega$.

Ejercicio 2.– Sea $p \in \omega - \{0, 1\}$. Consideramos la función $f : \omega \to \omega$ definida como sigue: $f(x) =$ resto de dividir x entre p.

Se define el siguiente buen orden, R, en $\omega \times \omega$:

$$\langle x, y\rangle \ R \ \langle x', y'\rangle \Longleftrightarrow \begin{cases} f(y) < f(y') \\ \vee \\ f(y) = f(y') \wedge y < y' \\ \vee \\ f(y) = f(y') \wedge y = y' \wedge x < x' \end{cases}$$

Se pide:

(a) Calcular el tipo ordinal de las secciones iniciales de extremos $\langle 0, 2p\rangle$ y $\langle 0, 1\rangle$ (respecto del orden inducido).

(b) Probar que $\text{t.o.}(\langle \omega \times \omega, R\rangle) = \omega^2 \cdot p$.

Ejercicio 3.– Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$ tales que $\beta < \omega_\alpha$. Hallar los cardinales de los conjuntos $\omega_\alpha - \beta$ y $\omega_\alpha \times \beta$.

Puntuación : Ej. 1 y 2: 3.5 puntos. Ej. 3: 3 puntos.