ALGEBRA II. TEORÍA DE CONJUNTOS. (22–Enero–1998)

Nombre y Apellidos ....

Teoría: Sean a y b conjuntos numerables. Probar que los conjuntos $a \times b$ y $a \cup b$ son numerables.

(Hágase la prueba con todo detalle).

Ejercicio 1.– Sea $\langle a, R \rangle$ un conjunto bien ordenado. Consideremos el conjunto

$$b = \{x \subseteq a : \ x \ \text{ es un segmento inicial de } \ \langle a, R \rangle\}$$

Se pide:

(1) Probar que $\langle b, \subsetneqq \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado.

(2) Sea $f : a \to b - \{a\}$ la aplicación definida así

$$f(x) = S_R^a(x) = a_x, \quad \text{para cada } x \in a$$

(en donde $S_R^a(x) = a_x$ es la sección inicial de $\langle a, R \rangle$ de extremo x).

Probar que f es un isomorfismo de $\langle a, R \rangle$ en $\langle b - \{a\}, \subsetneqq \rangle$.

(3) A partir de **(1)** y **(2)**, probar que $\langle b, \subsetneqq \rangle$ es un conjunto bien ordenado.

Ejercicio 2.– Demostrar que la clase

$$A = \{x : \ x = \bigcup x \ \wedge \ x \neq |x|\}$$

es propia.

Ejercicio 3.– Probar que:

(a) $\forall n \in \omega - \{0\} \ \forall p \in \omega \ \forall \alpha \in \mathbf{Ord} - \{0\} \ ((\omega^\alpha \cdot p)^n = \omega^{\alpha \cdot n} \cdot p)$.

(b) $\forall n \in \omega - \{0\} \ \forall \alpha \in \mathbf{Ord} - \{0\} \ ((\omega^\alpha)^n + (\omega^\alpha \cdot 2)^n = (\omega^\alpha \cdot 3)^n)$.

Puntuación : Teoría : 2 puntos. Ej. 1: 3 puntos. Ej. 2: 2'5 puntos. Ej. 3: 2'5 puntos.