Examen de Teoría de Conjuntos 2-2-1999
Álgebra II 1er Cuatrimestre

Teoría: Demostrar que si a es un conjunto, entonces **no** existe una aplicación suprayectiva de a en $P(a)$. Deducir que si a es un conjunto numerable, entonces $P(a)$ es un conjunto infinito no numerable.

Ejercicio 1: Sea $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ una función normal. Probar que:

(a) $\forall\alpha\,[\,F(\alpha^+) = \alpha^+ \longrightarrow F(\alpha) = \alpha\,]$

(b) Para cada α, si $\beta + 1$ es el menor punto fijo de F estrictamente mayor que α, entonces $\beta = \alpha$.

(c) Para cada α, si β es el menor punto fijo de F estrictamente mayor que α, entonces $\beta = \alpha^+$ ó β es límite.

Ejercicio 2: Demostrar o refutar:

(a) $\forall\alpha\,\forall\beta\,(\,|\alpha| +_c |\beta| = |\alpha +_o \beta|\,)$

(b) $\forall\alpha\,\forall\beta\,(\,|\alpha| +_o |\beta| = |\alpha +_o \beta|\,)$

(c) La clase $A = \{x : x \text{ aplicación inyectiva } \wedge\ x \text{ numerable}\}$ es propia.

Ejercicio 3: Una función $f : \omega \to \omega$ se dice periódica si existe un número $t \in \omega - \{0\}$ cumpliendo que, para todo $n \in \omega$, $f(n) = f(n+t)$. En estas condiciones, t se llama un periodo de f. Para cada f periódica, notaremos n_f el menor periodo de f.
En $Ap(\omega) = \{f \in {}^{\omega}\omega : f \text{ periódica}\}$ definimos un **orden total** R como sigue:

$$fRg \iff (\,n_f < n_g\,) \vee (\,n_f = n_g \wedge \exists j < n_f\,(\,f(j) < g(j) \wedge \forall k < j\,[f(k) = g(k)]\,)\,)$$

Se pide:

(a) Determinar las secciones iniciales de $\langle Ap(\omega), R\rangle$ de extremos las siguientes funciones:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ 1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad g(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

(b) Probar que R es un buen orden sobre $Ap(\omega)$.

(c) Calcular los tipos ordinales de las secciones obtenidas en (a), especificando los correspondientes isomorfismos.

Puntuación: Teoría: 2 ptos ; Ej. 1: 2'5 ptos ; Ej. 2: 2'5 ptos ; Ej. 3: 3 ptos