TEORÍA DE CONJUNTOS

Álgebra II– Primer cuatrimestre. Curso 98–99.

Tema 1 : Conjuntos y clases

1.-Se definen $0 = \emptyset$, $1 = 0 \cup \{0\}$, $2 = 1 \cup \{1\}$, $3 = 2 \cup \{2\}$.

1. Probar que $0, 1, 2, 3$ son conjuntos.
2. Sea $x = \{\{\{1,2\},\{1\}\},\{2\}\}$. Calcular:

$$\bigcup x, \qquad \bigcup\bigcup x, \qquad \bigcap x, \qquad \bigcap\bigcap x, \qquad \bigcap\bigcup x, \qquad \bigcup\bigcap x$$

3. Sea $x = \{1, 2\}$. Calcular:

$$\bigcup\bigcup x, \qquad \bigcap\bigcap x, \qquad \Big(\bigcap\bigcup x\Big) \cup \Big(\bigcup\bigcup x - \bigcup\bigcap x\Big), \qquad \bigcup\Big(\bigcup x - \bigcap x\Big)$$

4. $\bigcap\bigcup(\mathcal{P}(2) - 2)$.

2.-Sean a y b conjuntos. Probar que:
(1) $b \in a \to \bigcap a \subseteq b \subseteq \bigcup a$ (2) $a \subseteq b \to \bigcup a \subseteq \bigcup b$ (3) $(\forall x(x \in a \to x \subseteq b)) \to \bigcup a \subseteq b$

3.-Sean a y b conjuntos. Probar que:

1. $\bigcup(a \cup b) = (\bigcup a) \cup (\bigcup b)$
2. Si a y b son conjuntos no vacíos, entonces $\bigcap(a \cup b) = (\bigcap a) \cap (\bigcap b)$. ¿Qué podemos asegurar si a ó b es el conjunto vacío?

4.-Sean a, b y c conjuntos tales que $a \cup b = a \cup c$ y $a \cap b = a \cap c$. Demostrar que $b = c$.

5.-Sean a y b conjuntos. Demostrar que las siguientes clases son conjuntos:

(1) $\{\{\{x\}\} : x \in a \cup b\}$ (2) $\{a \cup x : x \in b\}$
(3) $\{\mathcal{P}(x) : x \in a\}$ (4) $\{x \cup y : x \in a \wedge y \in b\}$

6.-Probar que:

1. (a) $\neg\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \neg\exists z(x \in z \wedge z \in x))$
   (b) La clase $A = \{x : \neg\exists z(x \in z \wedge z \in x)\}$ es propia.
2. (a) $\neg\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \forall z(x \in z \to \exists t \in z(t \cap z = \emptyset)))$
   (b) La clase $B = \{x : \forall z(x \in z \to \exists t \in z(t \cap z = \emptyset))\}$ es propia.
3. La clase $C = \{x : \forall z(x \in x \to x \cap z = \emptyset\}$ es propia.

7.-Sea a un conjunto. Estudiar en qué condiciones las siguientes clases son propias:

1. $A = \{x : \exists y\ (y \in a \wedge x \notin y)\}$.
2. $B = \{x : \exists y \exists z\ (y \in a \wedge z \in y \wedge x \notin z)\}$.
3. $C = \{x : \forall y\ (y \in a \to x \notin y)\}$.

(**Indicación:** En (2) distíngase los siguientes casos: $a = \emptyset$, $a = \{\emptyset\}$ y $(a \neq \emptyset \wedge a \neq \{\emptyset\})$. En (3) pruébese que $A = \mathbf{V} - \bigcup a$).

8.-Para cada fórmula, $\varphi(x)$, consideramos la clase $A_\varphi = \{x : \forall y\ (y \in x \to \varphi(y))\}$.

Se pide:

1. ¿Existe una fórmula $\varphi(x)$ tal que $A_\varphi = \{x : \varphi(x)\}$?
2. Sea $\varphi(x)$ una fórmula tal que $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$. Determinar A_φ.

9.-Probar que para cada conjunto x, existe algún y tal que $y \notin x$.

10.-Sean a y b conjuntos. Estudiar en qué condiciones es cierta la siguiente igualdad:

$$a \cup (\bigcup b) = \bigcup \{a \cup x : x \in b\}$$

(**Indicación:** Distíngase casos según b sea o no vacío y pruébese que se verifica la igualdad si y sólo si $(b = \emptyset \wedge a = \emptyset) \vee (b \neq \emptyset)$).

11.-Sean a y b conjuntos. Probar que:

1. $\bigcup \mathcal{P}(a) = a$.
2. $a \subseteq \mathcal{P}(\bigcup a)$. ¿Cuándo se verifica la igualdad?.
3. Si $a \in b$, entonces $\mathcal{P}(a) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup b))$.
4. $\mathcal{P}(a) = \mathcal{P}(b) \quad \Longleftrightarrow \quad a = b$.
5. No existe un conjunto x tal que $\mathcal{P}(x) \subseteq x$.

(**Indicación:** En (2) pruébese que $a = \mathbf{P}(\bigcup a) \Longleftrightarrow \exists x (a = \mathbf{P}(x))$).

12.-Sea a un conjunto. Probar que:

1. Si $a \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{P}(\bigcap a) = \bigcap \{\mathcal{P}(x) :\ x \in a\}$.
2. $\bigcup \{\mathcal{P}(x) :\ x \in a\} \subseteq \mathcal{P}(\bigcup a)$. ¿Cuándo se verifica la igualdad?

(**Indicación:** En (2) pruébese que la igualdad se verifica si y sólo si $\exists x\ (x \in a \wedge x = \bigcup a)$).

Tema 2 : Relaciones y aplicaciones

13.-Sean a y b conjuntos. Probar que:

1. $\bigcap \bigcap \langle a, b \rangle = a$.
2. $a \neq b \quad \Longrightarrow \quad \bigcap (\bigcup \langle a, b \rangle - \bigcap \langle a, b \rangle) = b$.
3. $(\bigcap \bigcup \langle a, b \rangle) \cup (\bigcup \bigcup \langle a, b \rangle - \bigcup \bigcap \langle a, b \rangle) = b$.

14.-Demostrar que la clase $A = \{x : \exists y \exists z (x = \langle y, z \rangle)\}$ es propia.

15.-Sean a un conjunto no vacío y b, c conjuntos. Probar que :

$$b \subseteq c \iff a \times b \subseteq a \times c \iff b \times a \subseteq c \times a$$

16.-Sean a y b conjuntos. Probar que la clase $\{\{z\} \times b : z \in a\}$ es un conjunto.

17.-Si x es un conjunto, definimos $x^{-1} = \{\langle y, z \rangle :\ \langle z, y \rangle \in x\}$. Si a y b son conjuntos, probar:

$$(1)\ (a \cup b)^{-1} = a^{-1} \cup b^{-1} \quad (2)\ (a \cap b)^{-1} = a^{-1} \cap b^{-1} \quad (3)\ (a - b)^{-1} = a^{-1} - b^{-1}$$

18.-Sean r y s relaciones. Probar que $(r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$.

19.-Calcular todos los pares ordenados de $\mathcal{P}(2)$, y el conjunto $\mathcal{P}(2)^{-1} \circ (\mathcal{P}(2) \upharpoonright 1)$.

20.-Demostrar o refutar:

1. $\{\langle x,y\rangle \ : \ \langle x,y\rangle \neq x\times y\}$ es clase propia.
2. Si $\bigcap A$ es conjunto, entonces A es conjunto.
3. R es una relación transitiva $\iff$ $R\circ R = R$.

21.-Demostrar que la clase $A=\{f : f \text{ es una aplicación}\}$ es propia.

22.-Sean a y b conjuntos y F una aplicación. Probar que:

1. $F^{-1}[\cup a] = \bigcup\{F^{-1}[c] : c\in a\}$.
2. $a\neq\emptyset \implies F^{-1}[\cap a] = \bigcap\{F^{-1}[c] : c\in a\}$.
3. $F^{-1}[a-b] = F^{-1}[a] - F^{-1}[b]$.

23.-Sean $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos, y b un conjunto. Probar que:

(1) $b\cap(\bigcap_{i\in I} a_i) = \bigcap_{i\in I}(b\cap a_i)$. (2) $b\cup(\bigcup_{i\in I} a_i) = \bigcup_{i\in I}(b\cup a_i)$.

(3) $b\cap(\bigcup_{i\in I} a_i) = \bigcup_{i\in I}(b\cap a_i)$. (4) $b\cup(\bigcap_{i\in I} a_i) = \bigcap_{i\in I}(b\cup a_i)$.

(5) $b-(\bigcap_{i\in I} a_i) = \bigcup_{i\in I}(b- a_i)$. (6) $b-(\bigcup_{i\in I} a_i) = \bigcap_{i\in I}(b- a_i)$.

(7) $b\times(\bigcap_{i\in I} a_i) = \bigcap_{i\in I}(b\times a_i)$. (8) $b\times(\bigcup_{i\in I} a_i) = \bigcup_{i\in I}(b\times a_i)$.

Tema 3 : Relaciones de orden

Nota: En los ejercicios de este tema que lo necesiten, admitiremos las propiedades usuales de los números naturales (ω) y enteros ($\mathbb{Z}$), así como algunas propiedades “intuitivas” de los conjuntos finitos e infinitos.

24.-Determinar si las siguientes relaciones son órdenes parciales, órdenes totales o buenos órdenes en los conjuntos, a, que se indican.

1. La relación $xRy \iff x<y$, en los conjuntos $a=\omega$ y $a=\mathbb{Z}$.
2. La relación $xRy \iff (x \text{ divide a } y)\wedge x\neq y$, en el conjunto $a=\omega$.
3. La relación $R=\emptyset$, en el conjunto $a=\emptyset$, y en cualquier conjunto a no vacío.
4. La relación $fRg \iff \exists n\in\omega\ [f(n)<g(n)\wedge\ \forall m<n\ (f(m)=g(m))]$, en $a={}^{\omega}2$.
5. La relación $xRy \iff \exists n\in\omega\ (n\cap x = n\cap y\wedge n\in x\wedge n\notin y)$, en el conjunto $a=\mathbf{P}(\omega)$.

(**Indicación**: En (4) y (5) pruébese que R es un orden total, pero no un buen orden en los conjuntos considerados).

25.-Consideremos la aplicación $f:\omega\to\omega$ definida como sigue :

$$f(n)=\begin{cases} n \text{ si } n\leq 1\\ \text{número de factores primos de } n \text{ si } n>1\end{cases}$$

Sea $<$ la ordenación usual de ω y consideremos la relación R definida por :

$$pRq \iff f(p)<f(q)\vee(f(p)=f(q)\wedge p<q)$$

Se pide:

1. Probar que $\langle\omega,R\rangle$ es un conjunto bien ordenado.
2. Demostrar que $\langle\omega,<\rangle\not\cong\langle\omega,R\rangle$.

(**Indicación**: Para probar que $\langle \omega, < \rangle \not\cong \langle \omega, R\rangle$, téngase presente que todo subconjunto de ω acotado superiormente, por la ordenación usual, es finito).

26.-(**Transporte de órdenes mediante aplicaciones inyectivas**) Sean a y b dos conjuntos, $S \subseteq b \times b$ y F una aplicación inyectiva de a en b. Sea R la relación definida en a como sigue:

$$xRy \Longleftrightarrow F(x)SF(y)$$

Demostrar que si S es un orden parcial (respectivamente, total o buen orden) en b, entonces R es un orden parcial (respectivamente, total o buen orden) en a.

27.-Sean $\langle a, R\rangle$ y $\langle b, S\rangle$ dos conjuntos p.o. (resp. t.o. ó b.o.) tales que $a \cap b = \emptyset$. Sea $R \oplus S = R \cup S \cup (a \times b)$. Demostrar que $\langle a \cup b, R \oplus S\rangle$ es un conjunto p.o. (resp. t.o. ó b.o.). $\llbracket$ diremos que $R \oplus S$ es la ordenación **suma lexicogr?fica** de R y S y notaremos $\langle a \cup b, R \oplus S\rangle = \langle a, R\rangle \oplus \langle b, S\rangle$ $\rrbracket$

28.-Sean $\langle a, R\rangle$ y $\langle b, S\rangle$ dos conjuntos0 p.o. (resp. t.o. ó b.o.. Definimos la relación $R \otimes S$ en el conjunto $a \times b$ como sigue:

$$< x, y > R \otimes S < z, t > \Longleftrightarrow ySt \vee (y = t \wedge xRz)$$

Demostrar que $\langle a \times b, R \otimes S\rangle$ es un conjunto p.o. (resp. t.o. ó b.o.. $\llbracket$ diremos que $R \otimes S$ es la ordenación **producto lexicogr?fico hebreo** de R y S y notaremos $\langle a \times b, R \otimes S\rangle = \langle a, R\rangle \otimes \langle b, S\rangle$ $\rrbracket$

29.-Para cada una de las siguientes condiciones, hallar un conjunto totalmente ordenado $\langle a, <\rangle$ que la verifique.

1. El conjunto $\langle a, <\rangle$ tiene un segmento inicial, b, tal que $a \neq b$ y, en cambio, b no es una sección inicial de $\langle a, <\rangle$.
2. Existe una aplicación $F : a \to a$ creciente tal que $F(x) < x$, para algún $x \in a$.
3. Existe $x \in a$ tal que $\langle a, <\rangle \cong \langle S^a_<(x), <\rangle$.
4. Existe $F : \langle a, <\rangle \cong \langle a, <\rangle$ tal que $F \neq I_a$.

30.-Demostrar que :

1. Si $a \times a$ es un conjunto bien ordenable, entonces a también lo es.
2. Si $\_P(a)$ es un conjunto bien ordenable, entonces a también lo es.

31.-Sea $\langle a, <\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Probar que son equivalentes:

1. Para cada subconjunto no vacío, b, de a, existe un elemento minimal de b.
2. Si $\varphi(x)$ es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos, tal que

$$\forall x \in a\ ((\forall y \in a(y < x \to \varphi(y))) \to \varphi(x))$$

entonces $\forall x(x \in a \to \varphi(x))$.

(**Indicación**: Para probar que $\neg(2) \Longrightarrow \neg(1)$, sea $\varphi(x)$ una fórmula del lenguaje de la T.C. tal que $\forall x \in a((\forall y \in a(y < x \to \varphi(y))) \to \varphi(x))$ y $\exists x \in a\ (\neg\varphi(x))$. Entonces, considérese el conjunto $b = \{x : x \in a \wedge \neg\varphi(x)\}$. Para probar que $\neg(1) \Longrightarrow \neg(2)$, si b es un subconjunto no vacío de a que carece de minimales, considérese la fórmula $\psi(x, b) \equiv x \notin b$).

32.-(**Inducción sobre conjuntos bien fundamentados**) Sea a un conjunto y R una relación en a. Diremos que R es **bien fundamentada** sobre a si todo subconjunto no vacío, x, de a posee elemento R–minimal; es decir, $\exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in x \to \langle z, y\rangle \notin R))$.

Sea R una relación bien fundamentada sobre a. Probar que si b es un subconjunto de a tal que $\forall x \in a((\forall y \in a(\langle y, x\rangle \in R \to y \in b)) \to x \in b)$, entonces $b = a$.

Tema 4 : Ordinales

33.-Sea a un conjunto transitivo. Probar que los conjuntos $\bigcup a$ y $\mathcal{P}(a)$ también son transitivos. ¿Puede afirmarse que si $\bigcup a$ ó $\mathcal{P}(a)$ es transitivo, lo sea el conjunto a?

34.-Sea a un conjunto. Demostrar que a es transitivo si y sólo si $\bigcup a^+ = a$.

35.-Dar ejemplos de:

(a) un conjunto transitivo que no sea un ordinal;

(b) un conjunto bien ordenado por la relación de pertenencia que no sea un ordinal.

36.-Demostrar que si a es un conjunto, entonces son equivalentes:

1. a es un ordinal.
2. $\subset_a = \{< x, y >\in a \times a : x \subsetneq y\}$ es un buen orden en a y $\forall x \in a\ (x = \{y \in a : y \subsetneq x\})$.
3. Existe un buen orden R en a tal que $\forall x \in a\ (x = \{y \in a : yRx\})$.
4. La relación $\in_a$ es un buen orden en a y $\forall x \in a\ (x = \{y \in a : y \in x\})$.

37.-Dado un ordinal α, probar que $\alpha^+ = min\{\beta \in \text{ Ord } : \alpha < \beta\}$.

38.-Sean α y β ordinales. Probar que $\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha^+ < \beta^+$.

39.-Sean a y b conjuntos de ordinales. Supongamos que $\forall\alpha(\alpha \in a \to \exists\beta(\beta \in b \wedge \alpha < \beta))$. Probar que $\bigcup a \in \bigcup b$ ó $\bigcup a = \bigcup b$.

40.-Sea A una clase de ordinales. Probar que son equivalentes:

1. A es una clase propia.
2. A no está acotada superiormente en $\langle \text{Ord}, \in\rangle$.
3. $\bigcup A = \text{Ord}$.

41.-Sean a y b conjuntos. Usando el esquema de axiomas de reemplazamiento, probar que las siguientes clases son conjuntos:

(1) $A = \{\{\{x\}\} : x \in a \cup b\}$	(2) $B = \{a \cup x : x \in b\}$
(3) $C = \{\mathcal{P}(x) : x \in a\}$	(4) $D = \{x \cup y : x \in a \wedge y \in b\}$

42.-Sea F una aplicación. Probar que F es un conjunto si y sólo si $\text{dom}(F)$ es un conjunto.

43.-Sea F una aplicación. Demostrar o refutar:

1. Si x es un conjunto, entonces $F^{-1}[x]$ es un conjunto.
2. Si x es un conjunto y F es inyectiva, entonces $F^{-1}[x]$ es un conjunto.

44.-Demostrar o refutar:

1. Si R es una relación y a un conjunto, entonces $R[a]$ es conjunto.
2. $\forall z\exists u\forall y(y \in u \leftrightarrow \exists x \in z\forall v(v \in y \leftrightarrow \exists w \in x(v \in w)))$.

45.-Demostrar que si $\langle a, <\rangle$ es un conjunto bien ordenado y $a \neq \emptyset$, entonces

$$t.o.(\langle a, <\rangle) = \{t.o.(\langle S^a_<(x), <\rangle) : x \in a\}$$

Tema 5 : El conjunto de los números naturales.

46.-Sea $\langle a, <\rangle$ un conjunto bien ordenado no vacío y $\alpha = t.o.(\langle a, <\rangle)$. Demostrar que el ordinal α es límite si y sólo si $\langle a, <\rangle$ carece de elemento maximo.

47.-Sea a un conjunto no vacío de ordinales. Demostrar o refutar:

1. Si los elementos de a son límites, entonces $\bigcup a$ es límite.

2. Si los elementos de a son sucesores, entonces $\bigcup a$ es sucesor.

48.-Demostrar que un ordinal es límite si y sólo sí es un conjunto inductivo.

49.-Dar un ejemplo de un conjunto inductivo que no sea un ordinal.

50.-Sea R la relación definida en $\mathbb{Z}$ como sigue:

$$xRy \iff |x| < |y| \vee (|x| = |y| \wedge x < y)$$

1. Demostrar que R es un buen orden en $\mathbb{Z}$.
2. Calcular $t.o.(\langle S_R^{\mathbb{Z}}(x), R\rangle)$.

51.-Sea R la relación definida en $\omega \times \omega$ como sigue:

$$< x, y > R < x', y' > \iff x + y < x' + y' \vee (x + y = x' + y' \wedge x < x')$$

1. Demostrar que R es un buen orden en $\omega \times \omega$.
2. Calcular $t.o.(\langle S_R^{\omega\times\omega}(< x, y >), R\rangle)$.
3. Probar que la aplicación $f : \omega \times \omega \to \omega$ definida por $f(< x, y >) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$ es un isomorfismo de $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ en $\langle \omega, <\rangle$.

52.-Sea R la relación definida en $\omega \times \omega$ como sigue:

$$< x, y > R < x', y' > \iff \begin{cases} \text{máx}(x, y) < \text{máx}(x', y')\vee \\ (\text{máx}(x, y) = \text{máx}(x', y') \wedge x < x')\vee \\ (\text{máx}(x, y) = \text{máx}(x', y') \wedge x = x' \wedge y < y') \end{cases}$$

1. Demostrar que R es un buen orden en $\omega \times \omega$.
2. Calcular $t.o.(\langle S_R^{\omega\times\omega}(< 0, y >), R\rangle)$.
3. Calcular $t.o.(\langle S_R^{\omega\times\omega}(< x, y >), R\rangle)$.

53.-Sean R y S las relaciones sobre $2 \times \omega$ definidas como sigue:

$$\begin{array}{l} < x, y > R < x', y' > \leftrightarrow x + y < x' + y' \vee (x + y = x' + y' \wedge x < x') \\ < x, y > S < x', y' > \leftrightarrow x < x' \vee (x = x' \wedge y < y') \end{array}$$

Demostrar que :

1. $t.o.(\langle 2 \times \omega, R\rangle) = \omega$
2. $t.o.(\langle 2 \times \omega, S\rangle)$ es un ordinal límite.
3. $t.o.(\langle 2 \times \omega, S\rangle) > \omega$.

Tema 6 : Teoremas de inducción y recursión

54.-Demostrar que si a es un conjunto y $G : V \times V \to V$, entonces existe una única aplicación $f : \omega \to V$ tal que

$$\begin{array}{l} f(0) = a \\ \forall n\ (f(n^+) = G(< f(n), n >)) \end{array}$$

55.-Sean a un conjunto y $G, H : V \to V$. Probar que existe una única aplicación $F : \_Ord \to V$ tal que

$$F(\alpha) = \begin{cases} a, & \text{si } \alpha = 0; \\ G(F(\beta)), & \text{si } \alpha = \beta + 1; \\ H(F(\restriction \alpha)), & \text{si } \alpha \text{ es límite} \end{cases}$$

56.-Demostrar que si $G : V \times V \to V$, entonces existe una única aplicación $F : V \times \_Ord \to V$ tal que

$$\forall a \in V \ \forall \alpha \ \in \_Ord \ (F(a, \alpha) = G(a, F_a \restriction \alpha)),$$

donde $F_a : \_Ord \to V$ est**?** definida por $F_a(\beta) = F(a, \beta)$.

(**Indicación**: Para establecer la existencia, dado $a \in V$ considérese la aplicación $G_a : V \to V$ definida por $G_a(x) = G(a, x)$, para cada $x \in V$, y aplíquese el teorema de recursión en **Ord**).

57.-Sean a un conjunto, $G : V \to V$ y $f : \omega \to V$ definida por

$$\begin{array}{l} f(0) = a \\ \forall n \ (f(n^+) = G(f(n))) \end{array}$$

Demostrar que si G es inyectiva y $a \notin \mathrm{rang}(G)$, entonces f es inyectiva.

58.-Demostrar o refutar:

> *Sean $G_1, G_2 : V \to V$ tales que $G_1 \restriction \mathbf{Ord} = G_2 \restriction \mathbf{Ord}$. Entonces las funciones F_1 y F_2 que obtenemos aplicando el teorema de recursión sobre ordinales a G_1 y G_2, respectivamente, son iguales.*

59.- Sea $m \in \omega$ y notemos $[m, \infty[= \{n \in \omega : m \leq n\}$. Sea B un conjunto no vacío y $a \in B$. Sea g una aplicación de B en B. Probar que existe una única aplicación $F : [m, \infty[\to B$ tal que

$$\begin{array}{l} F(m) = a \\ \forall n \in [m, \infty[\ (F(n^+) = g(F(n))) \end{array}$$

60.-(**Suma de números naturales**)

1. Demostrar que para cada $n \in \omega$ existe una única aplicación $\varphi_n : \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} \varphi_n(0) = n \\ \forall x \ (\varphi_n(x^+) = (\varphi_n(x))^+) \end{array}$$

2. Demostrar que existe una única aplicación $\varphi : \omega \times \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} \forall m \ (\varphi(m, 0) = m) \\ \forall m \forall n \ (\varphi(m, n^+) = (\varphi(m, n))^+) \end{array}$$

Notación: $\varphi(m, n) = m + n$, para cada $m, n \in \omega$.

(**Indicación**: Pruébese (1) aplicando el ejercicio 60 a un esquema adecuado).

61.-(Producto de números naturales)

1. Demostrar que para cada $n \in \omega$ existe una única aplicación $\psi_n : \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} \psi_n(0) = 0 \\ \forall x \ (\psi_n(x^+) = n + \psi_n(x)) \end{array}$$

2. Demostrar que existe una única aplicación $\psi : \omega \times \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} \forall m \ (\psi(m,0) = 0) \\ \forall m \forall n \ (\psi(m,n^+) = m + \psi(m,n)) \end{array}$$

Notación: $\psi(m,n) = m \cdot n$, para cada $m, n \in \omega$.

62.-(La función factorial) Demostrar que existe una única aplicación $f : \omega \to \omega$ tal que
$$f(0) = 1 \quad \text{y} \quad (\forall n) \ (f(n^+) = (n^+) f(n))$$

Tema 7 : Aritmética ordinal

63.-Estudiar el crecimiento y la continuidad de las siguientes funciones $F_i : \_Ord \to \_Ord$:

1. $F_1(\alpha) = \alpha + 1$
2. $F_2(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha < \omega; \\ \omega, & \text{si } \alpha \geq \omega. \end{cases}$
3. $F_3(\alpha) = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{si } \alpha \text{ no es límite;} \\ \alpha, & \text{si } \alpha \text{ es límite.} \end{cases}$
4. $F_4(\alpha) = \bigcup \alpha$

64.-Sea $F : \_Ord \to \_Ord$ normal. Probar:

1. $A = \{\alpha \ : \ F(\alpha) = \alpha\}$ es propia.
2. Dado un ordinal α, el punto fijo β de F que proporciona la prueba del teorema de Veblen es el **menor** de los puntos fijos de F que es mayor o igual que α.

65.-Probar que la clase $\{\alpha \in \_Ord : \alpha \text{ es límite}\}$ es una clase propia.

66.-Sea $F : \_Ord \to \_Ord$ una función normal. Sean $A = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : \ F(\alpha) = \alpha\}$ y G el único isomorfismo de $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$ en $\langle A, \in \rangle$. Se pide:

1. Interpretar los valores $G(\alpha)$, para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$.
2. Probar que la aplicación G, considerada de **Ord** en **Ord**, es normal.
3. Probar que $F = G$ si y sólo si $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}(F(\alpha) = \alpha)$.

67.-¿Existe algún ordinal α tal que $\alpha + \omega = \alpha^+$?.

68.-Dar ejemplos de ordinales α, β tales que

(1) $\alpha < \beta$ y $\alpha + \beta < \beta + \alpha$ (2) $\alpha < \beta$ y $\beta + \alpha < \alpha + \beta$

69.-Hallar una permutación de los ordinales $1, 2, \omega$ tal que su suma sea, respectivamente:
$$\omega, \quad \omega + 1, \quad \omega + 2, \quad \omega + 3$$

70.-Dar ejemplos de un conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ tal que el tipo ordinal de $\langle A, <_{\mathbb{Q}} \rangle$ sea, respectivamente:

$$\omega + n \text{ (con } n > 0), \quad \omega \cdot 2, \quad \omega \cdot \omega$$

71.-Sean $\alpha, \beta \in \_Ord$ con $\beta \neq 0$. Demostrar que $\alpha + \beta$ es límite si y sólo si β es límite.

72.-Para cada $n \in \omega$, se definen $A_n = \{\alpha : n + \alpha = \alpha\}$ y $A'_n = \{\alpha : n \cdot \alpha = \alpha\}$. Demostrar que:

1. $A_0 = \_Ord = A'_1$ y $A'_0 = 1$.
2. Si $n \neq 0$, entonces $A_n = \_Ord - \omega$.
3. Si $n > 1$, entonces $A'_n = \{\omega \cdot \beta : \beta \geq 0\}$.

73.-Sean $p, q, n \in \omega$. Demostrar que:

$$(\omega \cdot p + q) \cdot n \quad = \quad \begin{cases} q \cdot n, & \text{si } p = 0 \\ 0, & \text{si } p \neq 0 \wedge n = 0 \\ \omega \cdot p \cdot n + q, & \text{si } p \neq 0 \wedge n \neq 0 \end{cases}$$

(**Indicación :** Para $p > 0$ pruébese el resultado por inducción sobre n).

74.-Demostrar que si $\alpha < \beta$ y γ es sucesor, entonces $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

75.-Demostrar que si $\alpha > 1$ y $\beta > 1$, entonces $\alpha + \beta \leq \alpha \cdot \beta$.

76.-Demostrar que si $n > 1$, entonces $n^\omega = \omega$.

77.-Demostrar que si $\alpha > 1$, entonces $\beta \leq \alpha^\beta$.

78.-Hallar, en cada caso, el cociente y el resto de dividir α por β:

(1) $\alpha = \omega^2 + \omega \cdot 5 + 3, \quad \beta = \omega^2 + 1$ (2) $\alpha = \omega^\omega + \omega^3 + \omega \cdot 3 + 2, \quad \beta = \omega^5$

79.-Demostrar que si $\alpha > 0$ y β es límite, entonces $\alpha^+ \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$.

80.-Sean $\alpha, \beta \in \_Ord$. Probar que si α es límite y $\beta \neq 0$, entonces α^β es límite ¿Es cierto el recíproco?

81.-Sean $\alpha, \beta \in \_Ord$ tales que $\alpha < \beta$. Sean $p, q \in \omega$ tales que $q > 0$. Probar que:

$$\omega^\alpha \cdot p + \omega^\beta \cdot q = \omega^\beta \cdot q$$

82.-Simplificar las siguientes expresiones:

(1) $(\omega^2 + \omega \cdot 2 + 2) + (\omega + 1)$ (2) $(\omega^7 + \omega^5 + \omega^3 \cdot 2 + \omega \cdot 10 + 3) + (\omega^4 + \omega^2 \cdot 2 + 2)$

83.-Sean $k \in \omega - \{0\}$, $\gamma_o, \ldots, \gamma_k \in \_Ord$ y $n_0, \ldots, n_k \in \omega$ tales que $\gamma_0 > \ldots > \gamma_k$ y $n_i > 0$ (para cada $i \leq k$). Demostrar que :

1. Si $p > 0$, entonces $(\omega^{\gamma_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k) \cdot p = \omega^{\gamma_0} \cdot n_0 \cdot p + \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$.
2. Si $\gamma > 0$, entonces $(\omega^{\gamma_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k) \cdot \omega^\gamma = \omega^{\gamma_0 + \gamma}$

84.-Expresar los siguientes ordinales en la forma normal de Cantor:

(1) $(\omega + 1)^2$ (2) $(\omega + 1)(\omega^2 + 1)$ (3) $(\omega^2 + 1)(\omega + 1)$
(4) $(\omega^3 + \omega)^5$ (5) $(\omega^5 + \omega^3)^3$ (6) $(\omega^3 \cdot 4 + \omega^2 \cdot 5 + 2)^2 + \omega^5 + 3$

85.-Probar que para todo $\alpha \in \mathbf{Ord} - \{1\}$ se tiene que α es límite si y sólo si $1^\alpha + 2^\alpha = 3^\alpha$.

(**Indicación**: pruébese por inducción débil en $\omega - \{0, 1\}$ que $\forall n \in \omega - \{0, 1\}(1^n + 2^n < 3^n)$).

86.-Probar la veracidad o falsedad de las siguientes fórmulas:

1. $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}(\alpha < \omega^2 \to \alpha + \omega^2 = \omega^2)$.
2. $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}(\alpha < \omega^2 + 1 \to \alpha + \omega^2 + 1 = \omega^2 + 1)$.

87.-Sea $F : \_Ord \to \_Ord$ la aplicación definida por $F(\alpha) = \omega \cdot \alpha$ y $A = \{\alpha : F(\alpha) = \alpha\}$.

1. Probar que existe un único isomorfismo $G : \langle \_Ord, \in\rangle \cong \langle A, \in\rangle$.
2. Hallar $G(0)$, $G(1)$ y probar que $G(n) = \omega^\omega \cdot n$ $(\forall n \in \omega)$.
3. Calcular $G(\omega)$ y demostrar que $G(\alpha) = \omega^\omega \cdot \alpha$ $(\forall\alpha \in \mathbf{Ord})$.
4. Hallar el menor punto fijo no nulo de G.

Tema 8 : El teorema del buen orden

88.-Demostrar que son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. Para cada familia no vacía $(a_i)_{i\in I}$ de conjuntos no vacíos, el producto cartesiano $\prod_{i\in I} a_i$ es no vacío.

89.-Demostrar (en $\mathbf{ZF}^-$) que son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. Si a es un conjunto, entonces para cada partición de a existe un conjunto b que tiene uno y sólo un elemento en común con cada conjunto de la partición.

(**Indicación**: En (2) $\Longrightarrow$ (1), si a es un conjunto, considérese $\Delta = \{\{y\} \times y : y \in a - \{\emptyset\}\}$).

90.-Demostrar (en $\mathbf{ZF}^-$) que son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. Si a es un conjunto y R es una relación de equivalencia en a, entonces existe un conjunto b que tiene uno y sólo un elemento en común con cada clase de equivalencia de a. (b se denomina un **conjunto de Zermelo** de a, relativo a R)

91.-Demostrar (en $\mathbf{ZF}^-$) que son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. Toda relación binaria que sea un conjunto contiene una aplicación con el mismo dominio.

92.-Sean a, b conjuntos y f una aplicación de a en b. Demostrar (en $\mathbf{ZFC}^-$) que f es suprayectiva si y sólo si existe una aplicación h de b en a tal que $f \circ h = I_b$, siendo I_b la aplicación identidad en el conjunto b.

93.-Sea $\langle A, <\rangle$ un conjunto ordenado. Demostrar (en $\mathbf{ZFC}^-$) que son equivalentes:

1. Todo subconjunto no vacío de A posee algún elemento minimal.
2. No existe una aplicación $f : \omega \to A$ tal que $\forall n \in \omega$ $(f(n + 1) < f(n))$.

(**Indicación:** Probar (2) $\Longrightarrow$ (1) por el contrarrecíproco, usando el teor. de recursión sobre ω).

Tema 9 : Conjuntos finitos, infinitos y numerables

94.-Demostrar que si $x \sim y$, entonces $\_P(x) \sim \_P(y)$.

95.-Demostrar o refutar: $y \subseteq x \wedge z \subseteq x \wedge y \sim z \rightarrow x - y \sim x - z$.

96.-Sea a un conjunto. Demostrar que a es finito si y sólo si existen $n \in \omega$ y una aplicación suprayectiva de n en a (como consecuencia probar que si a es finito y $f \in^a b$, entonces $f[a]$ es finito).

97.-Sea a un conjunto finito no vacío y R un orden total en a. Probar que $\langle a, R \rangle$ posee elemento m**?**ximo y elemento mínimo.

98.-Sea a un conjunto. Demostrar que a es finito si y sólo si existe un buen orden R en a tal que R^{-1} es un buen orden en a.

99.-Sea $\langle a, < \rangle$ un conjunto totalmente ordenado tal que todo subconjunto de a acotado superiormente es finito. Demostrar que $\langle a, < \rangle$ es un conjunto bien ordenado.

100.-Demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}[x]$ de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}$, es numerable.

(**Indicación**: Si $(p_i)_{i \in \omega}$ es una enumeración de los números primos, pruébese que es inyectiva la aplicación $g : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \omega$, definida por $g(a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n) = p_{i_0}^{|a_0|} \cdot p_{i_1}^{|a_1|} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}^{|a_n|}$; en donde $i_j = 2 \cdot j$, si $a_j \geq 0$, e $i_j = 2 \cdot j + 1$ si $a_j < 0$).

101.-Diremos que un número real b es **algebraico** si es raiz de algún polinomio perteneciente a $\mathbb{Z}[x]$. Probar que el conjunto de los números algebraicos es numerable.

(**Indicación**: Construir una aplicación suprayectiva de $\mathbb{Z}[x] \times \omega$ en A).

Temas 10 y 11 : Cardinales. Aritmética cardinal.

102.-Demostrar (explicitando una biyección) que son equipotentes los siguientes intervalos:

$$[0,1], \quad]0,1[, \quad [0,1[, \quad]0,1]$$

103.-Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Demostrar que los intervalos $[a,b]$, $]a,b[$,$[a,b[$ y $]a,b]$ son equipotentes (mostrando una biyección).

104.-Demostrar, mediante una biyección, que:

1. $[0,1[\sim [0,+\infty[$
2. $]-1,0] \sim]-\infty,0]$
3. $]-1,1[\sim \mathbb{R}$
4. $[a,b] \sim \mathbb{R}$

105.-Demostrar que $]0,1[\sim {}^{\omega}2 \sim \mathbb{R} \sim P(\omega)$, admitiendo el siguiente resultado:

> *Sea $a \in \omega$ tal que $a > 1$. Entonces, para cada $x \in]0,1[$, existe una única sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ de números naturales tal que:*
> 1. *Para cada $n \in \omega$, $x_n < a$.*
> 2. *$x = \sum_{n \in \omega} \frac{x_n}{a^{n+1}}$.*
> 3. *Existen infinitos n tales que $x_n < a - 1$.*

106.-Hallar el cardinal de $\mathbb{R}$. Probar que $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$. Hallar el cardinal de $\mathbb{R}^n$, para cada $n \neq 0$, y el cardinal del conjunto de los números complejos, $\mathbb{C}$.

107.-Sea a un subconjunto numerable de $\mathbb{R}^2$. Probar que $\mathbb{R}^2 - a \sim \mathbb{R}$. Establecer un resultado similar, siendo a un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$.

108.-Sea a un conjunto. Consideremos el conjunto

$$\mathbf{P}_F(a) = \{b : b \in \mathbf{P}(a) \wedge b \text{ es un conjunto finito}\}$$

Demostrar que si a es numerable, entonces $\mathbf{P}_F(a)$ es numerable.

(**Indicación**: Pruébese que $\mathbf{P}_F(\omega) \sim \omega$, a partir del desarrollo en base 2 de cualquier número natural distinto de cero).

109.-Probar que el conjunto $a = \{f \in^\omega \omega : \{n \in \omega : f(n) \neq 0\}$ es finito $\}$ es numerable.

(**Indicación**: Para cada $b \in \mathbf{P}_F(\omega)$, nótese $a_b = \{f \in a : \{n \in \omega : f(n) \neq 0\} = b\}$ y pruébese que $a_b \sim {}^b(\omega - \{0\}))$.

110.-Sea a un conjunto. Notemos ${}^{<\omega}a$ al conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de a. Probar que si $\alpha \in \_Ord - \omega$, entonces $\alpha \sim {}^{<\omega}\alpha$. Deducir que $|{}^{<\omega}\omega_\alpha| = \aleph_\alpha$, $(\forall \alpha \in \mathbf{Ord})$.

111.-Hallar, mediante aritmética cardinal, el cardinal de:

1. El conjunto de las sucesiones finitas de números naturales.
2. El conjunto de las sucesiones finitas de números reales.
3. El conjunto de las sucesiones infinitas de números naturales
4. El conjunto de las sucesiones infinitas de números reales.

112.-Demostrar que si $|a| \geq \aleph_0$, $b \subseteq a$ y $|b| < |a|$, entonces $|a - b| = |a|$.

113.-Calcular el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:

1. El conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
2. El conjunto de las aplicaciones contínuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
3. El conjunto de las aplicaciones discontinuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

114.-Probar que:

1. $|\{\alpha \in \_Ord : |\alpha| < \aleph_0\}| = \aleph_0$.
2. $|\{\alpha \in \_Ord : |\alpha| \leq \aleph_0\}| = |\{\alpha \in \_Ord : |\alpha| = \aleph_0\}| = \aleph_1$.

115.-Sea $\alpha \in \_Ord$. Probar que

1. Para cada $\beta \in \_Ord$ se verifica: $\aleph_\alpha \leq \beta < \aleph_{\alpha+1} \Longrightarrow |\beta| = \aleph_\alpha$.
2. $|\{\beta \in \_Ord : |\beta| = \aleph_\alpha\}| = \aleph_{\alpha+1}$.

116.-Probar que todo cardinal infinito es **primo** (no es el producto de dos cardinales estríctamente menores).

117.-Sean $\alpha, \beta \in \_Ord$ tales que $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha$. Probar que $|\beta| = |\alpha|$.

118.-Sea f una aplicación y a un conjunto. Probar que $|f[a]| \leq |a|$.

119.-Sean α, β y $\ggg$ ordinales tales que $|\alpha| \leq \aleph_\ggg$ y $|\beta| \leq \aleph_\ggg$. Probar que

$$|\alpha + \beta| \leq \aleph_\ggg, \quad |\alpha \cdot \beta| \leq \aleph_\ggg, \quad |\alpha^\beta| \leq \aleph_\ggg$$

en donde $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ y α^β son operaciones ordinales.

(**Indicación**: pruébense dichos resultados por inducción sobre β).

120.-Probar que $|\omega^\omega| = |\epsilon_0| = \aleph_0$.